

Занятие и задание 4

Задача 1. Пусть $I(y) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}$. При каких y функция I

а) принадлежит классу C^1 ?

б) голоморфна?

Задача 2. При каких y функция $I(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+y^2}$ принадлежит классу C^1 ?

Задача 3. Найдите $\max_{x \in \mathbb{R}^+} f(x, y)$, где $f(x, y) = x^y e^{-x}$.

Задача 4. Докажите, что для любого $a > 0$ существует такое $C \in \mathbb{R}$, что при $y \in [0, a]$ функция $Ce^{-x/2}$ мажорирует функцию $f_y(x) = x^y e^{-x}$ на \mathbb{R}^+ .

Задача 5. Докажите, что функция

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

принадлежит классу C^1

а) при $y > 1$,

б) при $y > 0$.

Задача 6. Докажите, что функция

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

голоморфна при $\operatorname{Re} z > 0$ (интегрирование ведётся по половине вещественной оси).

Задача 7. На каком отрезке $y \in [a, b]$ семейство $f_y(x) = x^y$ мажорируется функцией со сходящимся на $[1, +\infty)$ интегралом?

Задача 8. Для непрерывной функции f постройте функцию $I(x)$, для которой выполнено $I^{(n+1)}(x) = f(x)$, $I(0) = \dots = I^{(n)}(0) = 0$.

Задача 9 (Интегральное представление решения уравнения Эйри).

а) Пусть $L_y = D_y^2 - y$. Найдите $L_y e^{xy - \frac{x^3}{3}}$

б) Найдите функцию $g(x, y)$, для которой $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = L_y e^{xy - \frac{x^3}{3}}$.

с*) Докажите, что интеграл $I(y) = \int_\gamma e^{zy - \frac{z^3}{3}} dz$, взятый по контуру γ , составленному \mathbb{R}^+ и $e^{\frac{2\pi i}{3}} \mathbb{R}^+$, удовлетворяет *уравнению Эйри*: $I'' - yI = 0$.

Задача 10. Проверьте, что функция $J_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}} dx$ удовлетворяет *уравнению Бесселя* $f'' + \frac{1}{y}f' + f = 0$.