Занятие и задание 2

Задача 1. a) Разложите в ряд Тейлора в нуле функцию $(1+x)^4$.

b) Разложите в ряды Фурье по системам E и SC следующие функции: $\cos^2 x, \sin^3 x$.

Задача 2. Пусть $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,\ a_k \in \mathbb{C}$.

a) Разложите в ряд Фурье функцию $f_r(\theta) = P(re^{i\theta})$.

b) Будет ли отображение $\mathbb{R}^+ \to L_2(S^1),\ r \to f_r$ непрерывным?

Задача 3. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty. \tag{1}$$

Положим $f_r(\theta) = F(re^{i\theta})$.

a) Оцените снизу радиус сходимости ряда (1).

b) Докажите, что $f_r \in L_2(S^1)$ при всех $r \in [0,1]$.

c) Будет ли отображение $[0,1] \to L_2(S^1),\ r \to f_r$ непрерывным?

Задача 4. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}$, где $\sum |c_k| < \infty$. Докажите, что она продолжается непрерывно функцией, голоморфной в верхней полуплоскости, и оцените сверху ее модуль.

Задача 5. Разложите в ряд Фурье по базису $e^{2\pi i \frac{k}{l} x}$, $k \in \mathbb{Z}$, функцию с периодом $2\pi l$.

Задача 6. Выразите корни из единицы k-той степени через комплексную экспоненту. Найдите их сумму.

Задача 7. Запишите эрмитово скалярное произведение в ортонормальном базисе.

Задача 8. Восстановите скалярное произведение (u,v) и эрмитову форму $\langle u,v\rangle$ по значениям их квадратичных форм (v,v) и $\langle v,v\rangle$.

Задача 9. Пусть $\langle u,v\rangle$ — эрмитова форма на $\mathbb{C}^n$.

a) Докажите, что $\operatorname{Re}\langle u,v\rangle$ — скалярное произведение, а $\operatorname{Im}\langle u,v\rangle$ — симплектическая (невырожденная кососимметрическая) форма на $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

b) Восстановите $\langle u,v\rangle$ по $\operatorname{Im}\langle u,v\rangle$ и оператору умножения на комплексное число i.

c^*) Восстановите оператор умножения на i по $\operatorname{Re}\langle u,v\rangle$ и $\operatorname{Im}\langle u,v\rangle$.

d^*) Можно ли восстановить $\langle u,v\rangle$ по $\operatorname{Re}\langle u,v\rangle$ или $\operatorname{Im}\langle u,v\rangle$, не используя умножение на i?

Задача 10. Для каких непрерывных функций $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ следующая формула задаёт эрмитову форму на пространстве финитных непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}F(x)dx?$$

Задача 11. В пространстве l_2 последовательностей с суммируемым квадратом постройте

a) базис, состоящий из финитных последовательностей;

b^*) базис, не содержащий финитных последовательностей;

c^*) полную линейно независимую систему финитных последовательностей, не являющуюся базисом.

Задача 12* (Новое и старое определение $L_2(\mathbb{R})$). a^*) Докажите, что у каждого элемента $F \in L_2(\mathbb{R})$ есть представитель в виде функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со следующим свойством: если последовательность $g_i \in C_2^0(\mathbb{R})$ сходится к F, то на любом отрезке $[a,b]$ последовательность g_i сходится к f в $L_2([a,b])$.

b^*) Докажите, что два представителя с таким свойством отличаются на множестве меры ноль.