

Занятие и задание 15

Задача 1. Найдите интеграл формы $x^2 dy \wedge dz$ по сфере радиуса r в \mathbb{R}^3 с центром в начале координат.

Задача 2. а) Докажите, что граница границы любого сингулярного куба равна нулю.

б) Выведите отсюда, используя теорему Стокса, что $d^2 = 0$.

Задача 3. Выведите теорему Коши (интеграл голоморфной функции по замкнутому контуру в односвязной области равен нулю) из теоремы Стокса.

Задача 4. Докажите, что следующие два определения потенциальной силы (векторного поля) эквивалентны:

1) форма работы поля точна;

2) поле является градиентом некоторой функции (потенциала).

Задача 5. Выясните, являются ли следующие силы потенциальными, и при положительном ответе найдите их потенциал:

а) постоянная “сила тяжести” $F(\mathbf{x}) = e_1$,

б) сила упругости $F(\mathbf{x}) = -k\mathbf{x}$,

в) сила тяготения $F(\mathbf{x}) = -q \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ в \mathbb{R}^2 ,

г) $F(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$, где J — поворот на $\pi/2$ в \mathbb{R}^2 ,

д) любая радиальная сила (направленная по радиусу-вектору и зависящая только от расстояния до начала координат).

Задача 6. а) Найдите дивергенцию поля тяготения в \mathbb{R}^3 .

б*) Найдите все сферически симметричные потенциальные бездивергентные векторные поля в \mathbb{R}^3 .

Задача 7. а) Выразите интеграл формы потока векторного поля через поверхность как интеграл от функции по площади поверхности.

б) Рассмотрим гармоническую функцию в пространстве \mathbb{R}^3 с выколотой точкой. Сколько значений может принимать поток ее градиента через замкнутую поверхность? Найдите одно из этих значений.

Задача 8. Вычислите коразмерность подпространства точных 1-форм в пространстве замкнутых 1-форм (первые когомологии де Рама) для

а) линейного пространства;

б) плоскости без точки;

в) окружности;

г) плоскости без k точек;

д) двумерного тора;

е) двумерной сферы.