

## Занятие и задание 14

**Задача 1.** Проинтегрируйте по полусфере  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  следующие формы (ориентацию задайте произвольно):

- a)  $dx \wedge dy$ ;
- b)  $xdy \wedge dz$ ;
- c)  $zdx \wedge dy$ .

**Задача 2.** a) Докажите, что непрерывные внешние формы в  $\mathbb{R}^n$  образуют алгебру  $\Omega(\mathbb{R}^n)$  над  $\mathbb{R}$  относительно сложения и внешнего умножения.

- b\*) Докажите, что  $\Omega(\mathbb{R}^n)$  не изоморфно  $\Omega(\mathbb{R}^m)$  при  $n \neq m$ .
- c) Докажите, что для любого гладкого отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  обратный образ  $f^*$  является гомоморфизмом алгебр  $\Omega(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^m)$ .
- d) Выразите  $(f \circ g)^*$  через  $f^*$  и  $g^*$ .
- e) Докажите, что если  $f$  — диффеоморфизм  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то  $f^*$  является изоморфизмом алгебр.
- f\*\*) Верно ли обратное?

**Задача 3.** Для диффеоморфизма  $h : K \rightarrow K$  куба на себя проверьте формулу

$$\int_K h^* \omega = \pm \int_K \omega,$$

где знак в правой части плюс, если  $h$  сохраняет ориентацию, и минус иначе.

**Задача 4.** a) Докажите, что для любой непрерывной не тождественно нулевой внешней формы  $\omega$  в  $\mathbb{R}^n$  найдётся сингулярный куб  $\mathcal{K}$ , для которого  $\int_{\mathcal{K}} \omega \neq 0$ .  
 b) Верно ли, что для любого не тождественного сингулярного куба  $\mathcal{K}$  в  $\mathbb{R}^n$  найдётся непрерывная внешняя форма  $\omega$ , для которой  $\int_{\mathcal{K}} \omega \neq 0$ ?

**Задача 5.** Каков геометрический смысл интеграла формы

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

по двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^{2n}$ ?

*Подсказка: выразите ответ через площади.*

**Задача 6.** a) Докажите, что дифференциал  $d$  — корректно заданное линейное отображение из пространства  $k$ -форм в пространство  $k+1$ -форм.  
 b) Проверьте, что  $d \circ d = 0$ .  
 c) (Правило Лейбница). Для  $k$ -формы  $\omega$  и  $l$ -формы  $\eta$  докажите, что  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$ .  
 d) Докажите, что для любого отображения  $\phi$  выполняется  $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$ .

**Задача 7.** а) Докажите, что следующие условия на функцию  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  эквивалентны:

- 1)  $f$  голоморфна;
- 2)  $df$  имеет вид  $gdz$ ;
- 3) форма  $fdz$  замкнута;

б) для любой ли области  $D$  это равносильно точности формы  $fdz$ ?

**Задача 8.** Пусть  $\eta$  — форма нечётного порядка,  $D(\omega) = d\omega + \eta \wedge \omega$ . Найдите условие на форму  $\eta$ , для которой  $D \circ D = 0$ .