# Занятие и задание 11

**Задача 1.** Какие из следующих 1-форм точны в своей области определения:

a) $dx$, $f(x)dx$, $ydx$, $ydx + xdy$, $ydx - xdy$, $(x^2 + y^2)dx + 2xydy$ на $\mathbb{R}^2$;

b) $d\varphi$ на $S^1$;

c) $ydy + f(x)dx$, $\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

**Задача 2*.** Докажите, что каждую 1-форму на плоскости в окрестности точки, где она не равна нулю, можно домножить на функцию так, что она станет замкнутой. Эта функция называется *интегрирующим множителем.*

**Задача 3.** Найдите интегрирующий множитель для форм

$$xdy - ydx, \qquad 2xydx + (y^2 - x^2)dy, \qquad (x - y)dx + (x + y)dy$$

**Задача 4.** Для точных форм из предыдущей задачи найдите потенциалы.

**Задача 5.** Являются ли следующие векторные поля градиентными:

a) $\frac{\mathbf{x}}{r^2}$

b) $f(r)\mathbf{x}$

c) $(-f(x), y)$

d) $\left(-\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}\right)$

e) $(x - y, x + y)$

Для градиентных полей найдите потенциалы.

**Задача 6.** Найдите потоки векторных полей из предыдущей задачи (кроме c) через окружности с центром 0 и радиусом $r$. Для каких полей ответ не зависит от радиуса? Почему?

**Задача 7.** Найдите интеграл от формы $xdy$

a) по правильно ориентированному контуру треугольника со сторонами $3, 4, 4$.

b) по правильно ориентированной границе пересечения двух кругов радиуса 1, центры которых находятся на расстоянии 1 друг от друга.

**Задача 8.** Найдите интеграл по границе единичного квадрата с центром в нуле от формы $x^2dy$.

**Задача 9.** *Форма потока* векторного поля $v$ определяется с помощью внутренней производной как $\varphi_v(\xi) = dV(v, \xi)$. Докажите, что интеграл формы потока поля $v$ по правильно ориентированной границе области равен объему жидкости, протекающей через границу наружу со скоростью $v$ (скорость течения в точке $x$ равна $v(x)$).

**Задача 10.** *Дивергенцией* поля $v$ называется отношение $\frac{d\varphi_v}{dV}$. Выразите дивергенцию поля через его компоненты.

**Задача 11.** *Лапласианом* функции $f$ называется $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$. Выразите лапласиан через частные производные $f$.

**Задача 12.** Докажите, что поток поля через границу плоской области равен интегралу от дивергенции поля по этой области.

**Задача 13.** Докажите, что поток градиента функции через границу плоской области равен интегралу от лапласиана этой функции по этой области.

**Задача 14.** Найдите поток градиента функции $x^2 + y^2$

a) через положительно ориентированную окружность радиуса 1

b) через правильно ориентированную границу квадрата со стороной 1.