

Занятие и задание 1

- Задача 1.** а) Докажите, что скалярное произведение на \mathbb{R}^2 , заданное правилом $(u, v) = |u||v| \cos \angle(u, v)$, удовлетворяет аксиомам скалярного произведения.
- б) Проверьте аксиомы для эрмитова скалярного произведения. Почему нельзя обойтись без черты?
- Задача 2.** Компактна ли единичная сфера в $L_2(\mathbb{R})$?
- Задача 3.** Докажите, что пространство $C_2^0(\mathbb{R})$ не является полным.
- Задача 4.** Пусть степенной ряд сходится в $L_2[-1, 1]$. Оцените снизу его радиус сходимости.
- Задача 5.** Докажите, что функции $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$
- а) линейно независимы на $[-1, 1]$;
- б) образуют полную систему в $L_2[-1, 1]$;
- c^* не образуют базиса в $L_2[-1, 1]$.
- Задача 6 (Многочлен Лежандра).** а) Докажите, что $Q_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ — многочлен степени n .
- б) Докажите, что эти многочлены попарно ортогональны в $L_2[-1, 1]$.
Подсказка: проверьте, что $Q_n \perp 1, x, \dots, x^{n-1}$.
- Задача 7.** Найдите $Q_n(1)$.
Подсказка: воспользуйтесь равенством $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$.
- Задача 8.** Полиномы Лежандра определяются равенством: $P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{Q_n(1)}$.
- а) Докажите, что полиномы Лежандра образуют базис в $L_2[-1, 1]$.
- б) Исследуйте полиномы Лежандра на чётность.
- Задача 9.** Найдите $\|P_n\|$ в $L_2[-1, 1]$.
- Задача 10.** Проверьте ортогональность следующих систем:
- а) система E на $[-\pi, \pi]$, составленная e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$;
- б) система SC на $[-\pi, \pi]$, составленная $1, \sin(nx), \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$;
- в) система S на $[0, \pi]$, составленная $\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.
Подсказка: постарайтесь свести в) к б) и б) к а).
- Задача 11.** Найдите общий вид ряда Фурье для
- а) π -периодической функции по системе E ;
- б) нечетной функции по системе SC .
Подсказка: воспользуйтесь единственностью ряда Фурье.
- Задача 12.** При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ следующая функция принадлежит $L_2(\mathbb{R})$?
- а) $|x|^\alpha$;
- б) $(1 + |x|)^\alpha$.
- Задача 13.** Докажите, что следующие линейные функционалы ограничены в $L_2(\mathbb{R})$ и найдите их нормы:
- а) $\varphi \mapsto \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$,
- б) $\varphi \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \varphi(x) dx$,
- в) $\varphi \mapsto \int_{-1}^1 x^n \varphi(x) dx$.