

Дифференциальные формы

Задача 1. а) Выразите площадь фигуры на плоскости, ограниченной замкнутой несамопересекающейся гладкой кривой C , с помощью интеграла 1-формы на плоскости по C .

б) Чему будет равен этот интеграл для самопересекающейся кривой?

Задача 2. Докажите, что функция $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с заданными гладкими частными производными $f_i = \partial F / \partial x_i$ найдётся тогда и только тогда, когда $\partial f_i / \partial x_j = \partial f_j / \partial x_i$ для всех $1 \leq i < j \leq n$.

Задача 3. Докажите, что ограничение формы

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x_k dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge dx_{k+2} \cdots \wedge dx_n$$

на единичную сферу в \mathbb{R}^n совпадает с формой объёма.

Задача 4. Пусть v — векторное поле на многообразии M , ϕ_t — соответствующий поток диффеоморфизмов M . Для векторного поля u определим *производную Ли* $L_v u = \frac{d}{dt} ((d\phi_t) u)|_{t=0}$.

а) Запишите $L_v u$ в координатах и докажите, что $L_v u = -L_u v$ (по этой причине также $L_u v$ называется *коммутатором* векторных полей u и v и обозначается $[u, v]$).

б) Пусть ω — 1-форма на M . Докажите, что $\omega(L_v u) + (L_v \omega)(u) = L_v(\omega(u))$.

в) Докажите, что для k -формы ω и векторных полей v_0, \dots, v_k на M выполняется

$$\begin{aligned} d\omega(v_0, \dots, v_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i L_{v_i} \omega(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(L_{v_i} v_j, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k). \end{aligned}$$

d^*) Для векторных полей u, v, w докажите *тождество Якоби* $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Задача 5*. Пусть $Vect(M)$ — векторное пространство бесконечно гладких векторных полей на M . Для $M = \mathbb{R}^n$ определим *дивергенцию* векторного поля $\operatorname{div}(\sum f_i \partial / \partial x_i) = \sum \partial f_i / \partial x_i$

а*) Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{grad}} Vect(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\operatorname{div} \circ J} C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

где J — поворот на $\pi/2$ по часовой стрелке.

Подсказка: отождествите Vect(\mathbb{R}^2) с пространством 1-форм, второе $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с пространством 2-форм, отображения — с дифференциалом d .

б*) Определим отображение $\operatorname{rot} : Vect(\mathbb{R}^3) \rightarrow Vect(\mathbb{R}^3)$, переводящее $\sum f_i \partial / \partial x_i$ в определитель

$$\begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{grad}} Vect(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{rot}} Vect(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\operatorname{div}} C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Подсказка: действуйте аналогично.

c^*) Пусть S — гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , ограничивающая фигуру $D \subset \mathbb{R}^3$, пусть dS — форма объёма на S , n — вектор нормали. Докажите, что для всякого $v \in Vect(\mathbb{R}^3)$ выполняется

$$\int_S (v, n) dS = \int_D \operatorname{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Подсказка: используйте отождествления Vect(\mathbb{R}^3) с 1- и 2-формами и теорему Стокса.

d^*) Что будет 2-мерным аналогом предыдущего пункта?

e^*) Пусть S — гладкая поверхность с краем в \mathbb{R}^3 , гладкая кривая C — её край, dS и dl — форма объёма на S и C соответственно, n — вектор нормали к C в касательном пространстве к S . Выразите $\int_S (\operatorname{rot}(v), n) dS$ интегралом 1-формы по кривой C .

Задача 6*. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — две непересекающиеся замкнутые кривые. Определим отображение $\Gamma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ посредством $\Gamma(t_1, t_2) = \frac{\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)}{|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)|}$. За dS обозначим форму объёма на S^2 .



a*) Докажите, что $\int_{S^1 \times S^1} \Gamma^* dS$ является гомотопическим инвариантом пары непересекающихся кривых.



b*) Опишите этот инвариант в топологических терминах.

Задача 7*. Пусть M — бесконечно гладкое многообразие, $M^k = M \times \cdots \times M$ (всего k сомножителей), $\Delta \subset M^k$ — диагональ, состоящая из точек (x, x, \dots, x) . Пусть $C^{\wedge k}$ — пространство кососимметрических функций на M^k (для которых $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \text{Sign}(\sigma)f(x_1, \dots, x_k)$).



a*) Докажите, что всякая функция из $C^{\wedge k}$ имеет ноль кратности по крайней мере $k(k-1)/2$ на Δ .



b*) Установите изоморфизм факторпространства $C^{\wedge k}$ по подпространству функций с нулём кратности большей $k(k-1)/2$ на Δ с пространством $(k-1)$ -форм на M так, чтобы отображение

$$df(x_1, \dots, x_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \text{Sign}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

задавало дифференциал.