Дифференциальные формы и векторный анализ [срок сдачи 18.06]

Задача 1. При каком условии на f форма $f(z)d\bar{z}$ замкнута на $\mathbb{C}$?
Задача 2*. Докажите лемму Пуанкаре для 1-форм.
Задача 3*. Напомним, что внутренней производной k-формы ω вдоль векторного поля v называется $(k-1)$-форма $i_v\omega$:

$$i_v\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_{k-1}) = \omega(x;v(x),\xi_1,\dots,\xi_{k-1}).$$

Докажите формулу гомотопии:

$$i_v d\omega + d i_v\omega = L_v\omega$$

Подсказка: используйте бескоординатное определение дифференциала.

Задача 4. Найдите потенциал радиальной силы в $\mathbb{R}^n : v(x) = f(|x|)x$, где $f : \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ – класса C^1.
Задача 5*. Зададим оператор гомотопии $A : \omega \mapsto \alpha$ формулой:

$$a(x,\xi_1,\dots,\xi_k) = \int_0^1 \omega(tx;x,t\xi_1,\dots,t\xi_k)dt.$$

Докажите, что

$$dA - Ad = id.$$

Задача 6*. Пусть функции $F_1,\dots,F_n \in C^1$ образуют локальную карту в окрестности точки $p, G \in C^1$. Обозначим через γ кривую

$$F_2 = F_2(p),\dots,F_n = F_n(p).$$

Положим: $g = G|_\gamma$, $f = F_1|_\gamma$. Докажите, что f задаёт локальную координату на γ и выразите $\frac{dg}{df}(p)$ отношением двух n-форм.
Задача 7. Найдите поток поля grad f через сферу $|x| = 4$ в $\mathbb{R}^3$, если

$$f = \frac{1}{|x-e_1|} + \frac{1}{|x-3e_2|} + \frac{1}{|x-5e_3|}.$$

Задача 8*. Найдите все сферически симметричные потенциальные бездивергентные векторные поля в $\mathbb{R}^3$.
Задача 9*. Вычислите коразмерность пространства всех точных 1-форм в пространстве замкнутых на двумерном торе.
Задача 10*. Вычислите коразмерность пространства всех точных 1-форм в пространстве замкнутых на плоскости без k точек.