Векторные поля [срок сдачи 8.06]

Часть 1

Задача 1. Рассмотрим двумерный тор $= \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и пространство $L_2(\mathbb{T}^2)$ на нем, определяемое как пополнение пространства $C(\mathbb{T}^2)$ непрерывных функций $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ по норме

$$||f||^2 = \int_{\mathbb{T}^2} f\bar{f}(x)dx_1dx_2 \tag{1}$$

a) Докажите, что формула (1) действительно задает эрмитово скалярное произведение.

b) Докажите, что функции $e^{ikx},\ kx = k_1x_1 + k_2x_2,\ k \in \mathbb{Z}^2$, образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{T}^2)$. Обозначим его E. Доказать что ненулевые функции набора $\{\sin kx, \cos kx | k \in \mathbb{Z}^2_+\}$ образуют базис в $L_2(\mathbb{T}^2)$, обозначаемый SC.

Задача 2. Рассмотрим пространство $L_2^2(\mathbb{T}^2)$ векторных полей на торе: $v(x) \in T_x\mathbb{T}^2$. Введем в них скалярное произведение:

$$< v, w >= \int_{\mathbb{T}^2} (v(x), w(x))dx_1dx_2,$$

где (v, w) – скалярное произведение, унаследованное из $\mathbb{R}^2$ с естественной евклидовой сторуктурой. Докажите, что $SC(1,0) \cup SC(0,1)$, где $(1,0)$ и $(0,1)$ – базисные векторные поля в $\mathbb{R}^2$, образуют ортогональный базис в $L_2^2(\mathbb{T}^2)$.

Задача 3. Рассмотрим пространство ${}^{\mathbb{C}}L_2^2(\mathbb{T}^2)$, являющееся комплексификацией предыдущего с эрмитовым скалярным произведением:

$$< v, w >= \int_{\mathbb{T}^2} (v(x), w(x))dx_1dx_2,$$

но теперь $(v, w) = v_1\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2$. Докажите, что $SC(1,0) \cup SC(0,1)$ и $E(1,0) \cup E(1,0)$ – ортогональные базисы в ${}^{\mathbb{C}}L_2^2(\mathbb{T}^2)$.

Задача 4. Выразите скалярное произведение двух векторных полей через их (векторные) коэффициенты Фурье в базисе E.

Задача 5. Докажите, что в ${}^{\mathbb{C}}L_2^2(\mathbb{T}^2)$ бездивергентные векторные поля ортогональны градиентным.

Задача 6*. Докажите, что $L_2^2(\mathbb{T}^2)$ разлагается в прямую сумму двух подпространств, одно из которых является замыканием множества всех бездивергентных векторных полей, а другое – градиентных.

Задача 7*. Обобщите результат задачи 5 на n-мерный тор.

Задача 8*. Обобщите результат задачи 6 на n-мерный тор.

продолжение на обороте

Часть 2.

Задача 9. Докажите эквивалентность следующих определений оператора Лапласа:

(i) $\Delta f = \sum\limits_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

(ii) $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$.

Задача 10*. Докажите, что данные выше определения оператора Лапласа эквивалентны следующему:

(iii) $\Delta f(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{2n}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{v(S_\varepsilon^{n-1})} \int\limits_{y \in S_\varepsilon^{n-1}(x)} (f(y) - f(x)) ds$

Задача 11. Докажите, что функции $\ln \frac{1}{r}$ в $\mathbb{R}^2$ и $\frac{1}{r}$ в $\mathbb{R}^3$—гармонические.
Подсказка: воспользуйтесь определением (ii)

Задача 12. Найдите поток векторного поля $\frac{r}{|r^3|}$ в $\mathbb{R}^3$ через сферу

a) $|x - e_1| = 2$,

b) $|x - e_1| = \frac{1}{2}$.

Задача 13. Найдите поток векторного поля $\operatorname{grad} f$ через сферу S в $\mathbb{R}^3$ если

$$f = \frac{1}{|x - e_1|} + \frac{2}{|x - 2e_2|} + \frac{4}{|x - 4e_3|}, \qquad S = \{x | \, |x| = 3\}$$

Задача 14*. Докажите, что на двумерном торе нет непостоянных гармонических функций.