Листок 11 [срок сдачи 27.04]

Часть 1

Задача 1. Пусть голоморфная функция в проколотом диске растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$, то есть $|zf(z)| \to 0$ при $z \to 0$. Докажите, что тогда она ограничена и голоморфно продолжается в центр диска.
Подсказка: примените теорему об устранимой особенности к функции $zf(z)$.

Задача 2. Пусть голоморфная 2π-периодическая функция в верхней полуплоскости растет в каждой вертикальной полосе медленнее экспоненты: $|e^{\mathrm{Im}(z)}f(z)| \to 0$ при $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$. Докажите, что она ограничена.
Подсказка: примените результат предыдущей задачи к функции $f(i \ln z)$.

Задача 3*. Докажите, что последовательность

$$g_n(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{\frac{z}{k}}$$

сходится при $n \to \infty$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Здесь

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) -$$

константа Эйлера-Маклорена.

Задача 4*. Докажите, что в предыдущей задаче

$$\lim g_n(z) = \Gamma(z).$$

Это – представление Вейерштрасса для Г-функции.
Подсказка: воспользуйтесь аксиоматическим описанием Г-функции.

Задача 5*. Докажите, что последовательность

$$f_n(z) = n^z \frac{(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

сходится при $n \to \infty$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Задача 6*. Докажите, что в предыдущей задаче

$$\lim f_n(z) = \Gamma(z).$$

Это – представление Гаусса для Г-функции.
Подсказка: воспользуйтесь аксиоматическим описанием Г-функции.

Часть 2

Задача 7. Рассмотрим *преобразование Эно* $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, y^2 + c + ax)$.

a) Докажите, что отображение H—диффеоморфизм.

b) При каких значениях a и c для всех $v \in \mathrm{Vect}^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо равенство:

$$\mathrm{div}(H_* v) = (\mathrm{div} v) \circ H^{-1}?$$

Задача 8*. В условиях предыдущей задачи при каких значениях a и c для всех $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ справедливо равенство:

$$\mathrm{grad}(f \circ H^{-1}) = H_*(\mathrm{grad} f)?$$

Задача 9. Рассмотрим отображение H правой полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{(x, y) | x > 0\}$ в $\mathbb{R}^2$:

$$H(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Верно ли, что для любой функции $f \in C^1(\mathbb{C}^+)$ векторы $\mathrm{grad}\ (f \circ H)$ и $H_*\ \mathrm{grad}\ f$:

a) равны?

b) одинаково направлены?

Задача 10. Пусть $H : z \to H(z)$ – конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$. Докажите, что $\forall f \in C^1(D)$ векторы $H_*\ \mathrm{grad}\ f$ и $\mathrm{grad}\ (f \circ H)$ сонаправлены. Выведите отсюда ответ в предыдущей задаче.

Задача 11*. Пусть f – голоморфная функция в диске. Верно ли, что форма $f(\bar{z})d\bar{z}$ точна?