

Специальные функции [до экзамена]

Часть 1

Задача 1. Нарисуйте кривые $\{e^{\lambda t} | t \in \mathbb{R}\}$, где

- a) $\lambda \in \mathbb{R}$,
- b) $\lambda \in i\mathbb{R}$,
- c) $\lambda = 1 \pm i$.

Задача 2*. Найдите все замкнутые подгруппы

- a*) группы \mathbb{C}^* по умножению;
- b*) группы \mathbb{C} по сложению.

Задача 3. Найдите все вещественные непрерывные решения функционального уравнения

- a) $f(x+y) = f(x)f(y)$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
- b) $g(xy) = g(x) + g(y)$ для $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Часть 2

Задача 4. При каких значениях a график многозначной функции f замкнут в \mathbb{C}^2 , где

- a) $f(z) = z^a$;
- b) $f(z) = z^a(z-1)^{\sqrt{2}a}$?

Задача 5. а) Докажите, что все производные Г-функции при $t > 0$ получаются дифференцированием соответствующего интеграла по параметру.

- б) Докажите, что Г-функция выпукла вниз на $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
- в) Нарисуйте график Г-функции на вещественной оси.

Часть 3

Задача 6. Найдите $|\Gamma\left(\frac{n}{2} + iy\right)|$, $n \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$.

Подсказка: воспользуйтесь формулами отражения и сдвига.

Задача 7*. Найдите все решения функционального уравнения $F(z+1) = zF(z)$, удовлетворяющие условию

$$\left| F\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right| < e^{2\pi|y|}.$$