

# Интегралы, зависящие от параметра, преобразование Фурье [срок сдачи 2.03]

## Часть 1



**Задача 1.** Докажите, что формула

$$R(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f(t)(x-t)^n dt$$

даёт решение задачи  $R^{(n+1)}(x) = f(x)$ ,  $R(0) = R'(0) = \dots = R^{(n)}(0) = 0$



**Задача 2.** Выведите из этого интегральную формулу остаточного члена в ряду Тейлора.



**Задача 3\*.** Докажите, что интеграл

$$f(z) = \int_{\gamma} e^{\zeta z - \frac{\zeta^3}{3}} d\zeta$$

по контуру  $\gamma$ , составленному  $\mathbb{R}^+$  и  $e^{\frac{2\pi i}{3}} \mathbb{R}^+$ , даёт решение уравнения Эйри  $f'' - zf = 0$ .

## Часть 2



**Задача 4.** Найдите преобразование Фурье функции  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  и докажите, что  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ .



**Задача 5.** а) С какой скоростью убывает преобразование Фурье функции

$$\frac{x^3|x|}{x^6 + 1} ?$$



б) Сколько раз оно дифференцируемо (требуется указать число производных, принадлежащих  $L_2(\mathbb{R})$ )?

**Задача 6\* (Формула Котельникова).** Пусть функция  $f \in C^2$  финитна, и  $\text{supp}(f) \subset [-l\pi, l\pi]$ . Продолжим  $f$  по периодичности на прямую и разложим в ряд Фурье по гармоникам  $e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$ .



а\*) Докажите, что полученные коэффициенты Фурье, с точностью до множителя, совпадают со значениями преобразования Фурье в точках  $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$ . Найдите этот множитель.



б\*) Докажите, что функция  $f$  выражается через значения ее преобразования Фурье  $\tilde{f}(\alpha)$  на множестве  $\frac{\mathbb{Z}}{l}$  следующим способом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l} \sum_{\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} \chi_{[-\pi l, \pi l]}.$$



с\*) Выразите  $\tilde{f}$  в произвольной точке через значения  $\tilde{f}$  в точках множества  $\frac{\mathbb{Z}}{l}$ .

### Часть 3

**Задача 7.** Чему равно двукратное преобразование Фурье  $\hat{\hat{f}}$  для функции  $f$ ?

**Задача 8.** Выразите преобразование Фурье функций  $f(x+a)$ ,  $e^{i\beta x}f(x)$ ,  $f(\lambda x)$  через преобразование Фурье функции  $f$ .

**Задача 9\*.**  $a^*)$  Докажите, что для быстро убывающей функции  $f$  ряд  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k)$  сходится в  $L_2$ .

$b^*)$  Докажите формулу Пуассона:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

для быстро убывающей функции  $f$ .

*Подсказка: периодическая функция из  $L_2$  определяется своим рядом Фурье.*

**Задача 10\*.** Докажите, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности при стремлении  $t$  к нулю сходится к начальному условию, если последнее быстро убывает.