

Гамма-функция Эйлера.

Здесь описываются свойства одной из самых важных неэлементарных функций анализа. Обычно ее название пишется так: Г-функция.

1 Определение Г-функции.

Г-функция определяется как мероморфная функция в комплексной области. Явная формула задает ее в открытой правой полуплоскости. Далее используется аналитическое продолжение.

Определение 1 При $\operatorname{Re} z > 0$,

$$(1) \quad \Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Замечание 1 При любом фиксированном $t > 0$ подинтегральная функция

$$(2) \quad f(t, z) = t^{z-1} e^{-t}$$

голоморфна по z .

Теорема 1 При $\operatorname{Re} z > 1$ интеграл (1) задает голоморфную функцию.

Доказательство Это – утверждение задачи 6.9. Оно следует из теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла и того, что f как функция от t при фиксированном z , $\operatorname{Re} z > 1$, непрерывна на \mathbb{R}^+ и мажорируется функцией $e^{-\frac{t}{2}}$. А именно, для любого диска $D \subset \{\operatorname{Re} z > 1\}$ существует такое C , что

$$|f(t, z)| < Ce^{-\frac{t}{2}} \quad \forall z \in D.$$

Поэтому цитированная теорема применима. \square

Теорема 2 Теорема 1 остается справедливой, если в ней заменить $\operatorname{Re} z > 1$ на $\operatorname{Re} z > 0$.

Доказательство Определение 1 полезно написать как интеграл по всей оси, сделав замену $\tau = \ln t$. Тогда

$$(3) \quad \Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{z\tau} e^{-e^\tau} d\tau$$

При $\operatorname{Re} z > 0$, функция $e^{z\tau}$ как функция от вещественного τ экспоненциально стремится к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$. Функция

$$g(\tau, z) = e^{z\tau} e^{-e^\tau}$$

для любого $z : \operatorname{Re} z > 0$ мажорируется функцией $e^{-\varepsilon|\tau|}$ при $0 < \varepsilon < \operatorname{Re} z$. Более того, для любого диска $D \subset (\operatorname{Re} z > 0)$ существуют C, ε такие, что

$$|g(\tau, z)| < Ce^{-\varepsilon|\tau|} \text{ в } R \times D.$$

Эти два утверждения составляют содержание задач 1.9 и 2.9.

Из них следует, что теорема о дифферентировании под знаком интеграла применима, и Г-функция голоморфна в области $\operatorname{Re} z > 0$. \square

2 Формула сдвига и аналитическое продолжение

Γ -функция является голоморфным продолжением последовательности факториалов: для любого натурального n

$$(4) \quad \Gamma(n) = (n - 1)!$$

Это вытекает из следующей *формулы сдвига*: при $\operatorname{Re} z > 0$

$$(5) \quad \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

Формула сдвига доказывается с помощью интегрирования по частям. При $\operatorname{Re} z > 0$.

$$\Gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^+} t^{z-1} e^{-t} dt = \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} dt^z = \frac{1}{z} t^z e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^+} t^z e^{-t} dt = \frac{1}{z} \Gamma(z + 1).$$

Равенство $t^z|_{t=0} = 0$ использует то, что $\operatorname{Re} z > 0$. Отсюда следует формула (5). Заметим, что $\Gamma(1) = 1$. Это немедленно следует из определения. Формула (4) следует теперь из формулы сдвига.

Индукцией по n определим Γ -функцию в полосе

$$\Pi_n = \{\operatorname{Re} z \in [n - \varepsilon, n + 1 + \varepsilon]\},$$

предполагая, что в полосе Π_{n+1} Γ -функция уже определена и удовлетворяет (5). А именно, положим:

$$(6) \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z}.$$

Отметим, что в узкой полосе $L_{n+1} = \{|\operatorname{Re} z - (n + 1)| < \varepsilon\}$ функция Γ задана двумя способами: как ограничение Γ -функции из полосы Π_{n+1} и формулой (6). Но из формулы (6) для Γ -функции в полосе Π_{n+1} следует, что эти два определения Γ -функции совпадают. Это и значит, что Γ -функция в полосе Π_n является аналитическим продолжением Γ -функции, заданной в полосе Π_{n+1} .

3 Полюса и вычеты Γ -функции

Выразим Γ -функцию в любой точке z , $\operatorname{Re} z \leq 0$, через значения Γ -функции в правой полуплоскости. Фиксируем z . Пусть n таково, что $\operatorname{Re}(z + n) > 0$. Тогда в окрестности точки $z + n$, Γ -функция голоморфна. По формуле (5)

$$\Gamma(z + n) = (z + n - 1)\Gamma(z + n - 1) = (z + n - 1)(z + n - 2) \dots (z + 1)z\Gamma(z) := P_n(z)\Gamma(z).$$

Итак:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + n)}{P_n(z)}.$$

Пусть $P_n(z) \neq 0$. Тогда при всех w , близких к z , формула

$$(7) \quad \Gamma(w) = \frac{\Gamma(w + n)}{P_n(w)}$$

задает голоморфную функцию. Многочлен $P_n(z)$ имеет корень z только если

$$z \in \{0, -1, \dots, 1 - n\}.$$

Итак, функция Γ голоморфна вне целых отрицательных точек.

Пусть теперь $z = -n$, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Начнем со случая $n = 0$, $z = 0$. Тогда при малых w ,

$$\Gamma(w) = \frac{\Gamma(w+1)}{w}.$$

Напомним, что $\Gamma(1) = 1$, а

$$(8) \quad \text{Res}_a \frac{f(z)}{z-a} = f(a),$$

если функция f голоморфна в a . Следовательно,

$$\text{Res}_0 \Gamma = 1.$$

Отметим, что

$$P_n(-n+w) = (-n+w) \dots (w+1).$$

Следовательно, при малых w

$$\Gamma(-n+w) = \frac{\Gamma(w)}{(-n+w) \dots (-1+w)} = \frac{\Gamma(w+1)}{(-n+w) \dots (-1+w)w}.$$

Все множители в знаменателе последней дроби, кроме w , равно как и числитель, отличны от нуля в малой окрестности нуля. Поэтому Γ -функция имеет в точке $-n$ простой полюс с вычетом

$$\text{Res}_{-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

4 Убывание Γ -функции в направлении мнимой оси

Теорема 3 Γ -функция убывает в направлении мнимой оси быстрее любой степени. Это убывание равномерно в любой полосе $\text{Re } z \in [a, b]$.

Доказательство Краткое доказательство: ограничение Γ -функции на прямую, параллельную мнимой оси – это преобразование Фурье быстро убывающей функции.

Подробное доказательство. Рассмотрим сначала случай $0 < a < b$. Фиксируем x и пусть $z = x - \alpha i$. Воспользуемся формулой (3).

$$\Gamma(x - i\alpha) = \int_{\mathbb{R}} (e^{x\tau} e^{-e^{\tau}}) e^{-i\alpha\tau} d\tau.$$

При любом $x > 0$, функция $h_x : \tau \mapsto e^{x\tau} e^{-e^{\tau}}$ – быстро убывающая. Функция $\Gamma(x - i\alpha)$ – ее преобразование Фурье. Следовательно, функция $\Gamma(x - i\alpha)$ – тоже быстро убывающая. Легко доказать равномерность этого убывания по $x \in [a, b]$. Быстрое убывание в полосе $\text{Re } z \in [a, b]$ при $a < 0$ выводится из предыдущего и формулы сдвига. \square

5 Формула отражения

Γ -функция удовлетворяет многим замечательным соотношениям. Вот одно из них.

Теорема 4 Справедлива следующая формула отражения:

$$(9) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Доказательство Эта теорема выводится из доказанных выше свойств Г-функции и простейших теорем комплексного анализа. А именно, рассмотрим разность

$$(10) \quad R(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

и докажем, что $R(z) \equiv 0$. Для этого убедимся, что уменьшаемое и вычитаемое имеют одни и те же простые полюса, а в них – одни и те же вычеты. Отсюда следует, что функция $R(z)$ голоморфна. Мы докажем, что она ограничена. Тогда по теореме Лиувилля она константа. Но $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R(x + i\alpha) = 0$, как будет доказано ниже. Следовательно, $R \equiv 0$.

Перейдем к подробному изложению.

Шаг 1. Голоморфность функции R . Функция $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ имеет полюса в целых точках и только в них. Вычеты в этих точках имеют вид:

$$\text{Res}_n \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right) = \frac{\pi}{\cos \pi n} = (-1)^{n-1}.$$

Функция Γ имеет простые полюса в точках $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ и только в них. Функция $\Gamma(1-z)$ голоморфна в этих точках. Функция $\Gamma(1-z)$ имеет простые полюса в точках $n \in \mathbb{N}$ и только в них. Функция Γ голоморфна в этих точках. Следовательно, при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\text{Res}_{-n} \Gamma(z) \Gamma(1-z) = (\text{Res}_{-n} \Gamma) \Gamma(1+n) = \frac{(-1)^n}{n!} n! = (-1)^n.$$

Аналогично, при $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Res}_n \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \text{Res}_n \Gamma(1-z) \Gamma(n) = (-1)^n.$$

Следовательно, вычеты функций в правой и левой частях формулы (9) одинаковы, и функция R голоморфна на всей плоскости.

Шаг 2. Периодичность R . Функция R периодична с периодом 2. Действительно, этим свойством обладает функция $\frac{\pi}{\sin \pi z}$. Кроме того,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1-(z+1)) = \Gamma(-z) = \frac{\Gamma(-z+1)}{-z}.$$

Следовательно, $R(z+1) = -R(z)$. Поэтому $R(z+2) = R(z)$.

Шаг 3. Функция R убывает вдоль мнимой оси в полосе $\operatorname{Re} z \leq 1$.

Точнее, в области $|\operatorname{Re} z| \leq 1$ имеем: $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$.

Это немедленно следует из теоремы 3.

Шаг 4.

Предложение 1 Голоморфная T -периодическая функция R на плоскости \mathbb{C} превращается в голоморфную функцию на $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с помощью стандартной формулы:

$$(11) \quad \rho(\zeta) = R \left(T \frac{\ln \zeta}{2\pi i} \right).$$

Доказательство Когда точка ζ обходит вокруг нуля, к логарифму прибавляется $2\pi i$, и аргумент функции R в формуле (11) меняется на T . Но сама функция при этом не меняется, потому что T – ее период! Следовательно, функция ρ голоморфна в \mathbb{C}^* . \square

Когда $\zeta \rightarrow 0$ в любом секторе с раствором меньше 2π и с вершиной 0, $z = 2\frac{\ln \zeta}{2\pi i} \rightarrow \infty$ в полосе $|\operatorname{Re} z| < 1$, причем $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$. При этом рассматриваемая нами функция R , (10), стремится к нулю. По теореме об устранимой особенности, функция ρ голоморфно продолжается в 0.

Аналогично, функция ρ голоморфно продолжается в ∞ . Но голоморфная функция на сфере Римана постоянна. Следовательно, $\rho \equiv \operatorname{const}$. Предел функции ρ в нуле равен нулю. Следовательно, $\rho \equiv 0$, а значит и $R \equiv 0$. \square

6 Аксиоматическое описание Г-функции

Отметим, что мы воспользовались определением Г-функции ровно три раза: при выводе формулы сдвига, при мероморфном продолжении Г-функции на плоскость и при доказательстве того, что Г-функция убывает в любой вертикальной полосе. Оказывается, что эти три свойства, вместе с $\Gamma(z) = 1$, задают Г-функцию однозначно.

Теорема 5 Всякая функция G , голоморфная в правой полуплоскости $\mathbb{C}^+ : \operatorname{Re} z > 0$, удовлетворяющая формуле сдвига:

$$G(z+1) = zG(z),$$

и убывающая на бесконечности в любой вертикальной полосе, совпадает с Г-функцией, при условии $G(1) = 1$:

$$G(z) \equiv \Gamma(z).$$

Доказательство

Шаг 1. Г-функция нигде не обращается в 0. Это свойство достаточно проверить для $z \notin \mathbb{Z}$, поскольку в целых точках значения Г-функции известны. При $z \notin \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Правая часть конечна и отлична от нуля, и оба множителя в левой части конечны. Следовательно, ни один из них не равен нулю.

Шаг 2. Рассмотрим функцию

$$H(z) = \frac{G(z)}{\Gamma(z)}.$$

Она голоморфна в правой полуплоскости. В силу формулы сдвига, она 1-периодична:

$$H(z+1) = \frac{G(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{zG(z)}{z\Gamma(z)} = H(z).$$

Следовательно, функция

$$h(\zeta) = H\left(\frac{\ln \zeta}{2\pi i}\right)$$

голоморфна в \mathbb{C}^* . Докажем, что эта функция ограничена. Из формулы отражения и стремления Г-функции к нулю в вертикальных полосах, получаем:

$$|\Gamma(x+i\alpha)| > \frac{C}{|\sin \pi(x+i\alpha)|} > C'e^{-\pi|\alpha|}.$$

Более подробно,

$$|\Gamma(x + i\alpha)| |\Gamma(1 - (x + i\alpha))| = \frac{\pi}{|\sin \pi(x + i\alpha)|}$$

Второй сомножитель в левой части ограничен сверху некоторой константой C_1 . Поэтому

$$|\Gamma(x + i\alpha)| > \frac{\pi}{C_1 |\sin \pi(x + i\alpha)|}$$

Следовательно,

$$|H(x + i\alpha)| = \left| \frac{G(x + i\alpha)}{\Gamma(x + i\alpha)} \right| < ce^{\pi|\alpha|}.$$

При $\zeta = re^{i\varphi}$, $z = \frac{\ln \zeta}{2\pi i}$ имеем:

$$|\operatorname{Im} z| = \frac{|\ln r|}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$|h(\zeta)| < ce^{\frac{|\ln r|}{2}} = \frac{c}{\sqrt{r}}.$$

Значит функция h растет при приближении к нулю медленнее, чем r^{-1} . По теореме об устранимой особенности, она голоморфно продолжается в 0. Аналогично, h голоморфно продолжается в бесконечность. Следовательно, она константа как голоморфная функция на всей сфере Римана. Но $h(1) = 1$. Следовательно, $h \equiv 1$. \square