Элементарные функции.

1 Определение логарифма и экспоненты по Колмогорову.

1. Определение логарифма: $\log x = \int_1^\infty \frac{dt}{t}$
2. Основное свойство: $\log xy = \log x + \log y$
3. Производная: $(\log x)' = \frac{1}{x}$
4. Экспонента: функция, обратная к логарифму.
5. Производная экспоненты (с помощью теоремы об обратной функции)
6. Ряд Тейлора для экспоненты.
7. Аналитичность экспоненты. Комплексное продолжение.

2 Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра.

2.1 Другое определение экспоненты

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Теорема 1 *Новое определение равносильно старому.*

Доказательство Случай $x \in \mathbb{R}$.

$$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n}+o(1)\right) \to x$$

Следствие 1 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ *при* $n\to\infty, x\in\mathbb{R}$

Случай $z \in \mathbb{C}$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!},\ P_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Доказано:

$$s_n(x) - P_n(x) \to 0\ \forall x\in\mathbb{R}\ n\to\infty$$

Хотим:

$$s_n(z) - P_n(z) \to 0\ \forall z\in\mathbb{C}\ n\to\infty$$

$$s_n(z) - P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(\frac{z}{n}\right)^k C_n^k := \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

$$c_k = \frac{1}{k!} - \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n\dots(n-k+1)}{n^k}\right) > 0\ (!)$$

Положительность коэффициентов c_k играет решающую роль в следующей выкладке:

$$|s_n(z) - P_n(z)| = |\sum_{k=0}^n c_k z^k| \leqslant \sum_{k=0}^n c_k r^k = s_n(x) - P_n(x) \to 0,\ r = |z|,\ c_k > 0 \text{ при } k > 0$$

$\square$

2.2 Комплексные числа, модуль и аргумент, формула Муавра

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

2.3 Формула Эйлера

Теорема 2 $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Доказательство Равносильно: $|e^z| = e^x,\ \arg e^z = y$.

Картинка и доказательство:
$|1 + \frac{z}{n}| = 1 + \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})$,
$|(1 + \frac{z}{n})^n| = \left(1 + \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})\right)^n \to e^x$
$\arg(1 + \frac{z}{n}) = \frac{y}{n} + o(\frac{1}{n})$,
$\arg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = y + o(1) \to y$. □

3 Синус: от противолежащего катета до ряда Тейлора

Тригонометрическая форма комплексного числа (1) вытекает из элементарных определений синуса и косинуса.

Отсюда выводится формула Эйлера как сделано выше.

$e^z = e^x(\cos x + i\sin y)$.

Экспонента в левой части формулы Эйлера определяется с помощью рядя Тейлора. Поэтому

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y = \sum \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots$$

Приравнивая вещественные и мнимые части, получаем ряды Тейлора для синуса и косинуса.

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots$$

$$\sin y = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{y^{2k-1}}{(2k-1)!} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots$$

Отсюда, в частности, получаются формулы:

$$\sin' = \cos,\ \cos' = -\sin.$$

Но они получаются и из элементарных соображений. Круг замкнулся.