

## Свойства преобразования Фурье и их применение.

### 1 Дифференцируемость и убывание

Коэффициенты Фурье  $m$  раз дифференцируемой функции убывают как  $|k|^{-m}$ . Аналогичным свойством обладает преобразование Фурье.

**Теорема 1** Пусть преобразование Фурье функции  $f^{(m)}$  ограничено:  $|\mathcal{F}(f^{(m)})| < C$ , а сама функция вместе с производными до порядка  $(m-1)$  стремится к нулю на бесконечности. Тогда при  $|\alpha| \geq 1$  выполнено

$$(1) \quad |\tilde{f}(\alpha)| < \frac{C}{|\alpha|^m}.$$

**Доказательство** Похожая теорема уже доказана в лекции 5, только там функция  $f$  была финитна.

Индукция по  $m$ . База:  $m = 1$ . Имеем

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\alpha x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} df(x) = i\alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathcal{F}(f).$$

Двойная подстановка при интегрировании по частям обращается в ноль: поскольку  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$|\tilde{f}'(\alpha)| = \frac{|\tilde{f}'(\alpha)|}{|\alpha|}.$$

Шаг индукции состоит в применении этого неравенства к производным  $f', f'', \dots, f^{(m)}$  и дает (1).  $\square$

### 2 Убывание и дифференцируемость

Справедлива обратная теорема: убывание преобразования Фурье функции из  $L_2(\mathbb{R})$  на бесконечности со скоростью  $c|\alpha|^{-m}$  влечет  $m$ -кратную дифференцируемость функции при условии: что интегралы  $\int_{\mathbb{R}} f(\alpha) |\alpha|^m d\alpha$  абсолютно сходятся. Мы не будем доказывать это утверждение, а докажем родственный, существенно более полезный факт.

### 3 Пространство быстро убывающих функций

**Определение 1** Функция на  $\mathbb{R}$  называется *быстро убывающей*, если она бесконечно дифференцируема и убывает на бесконечности быстрее любой степени модуля  $x$  вместе с любой своей производной. Пространство всех таких функций обозначается  $\mathcal{S}$ .

**Теорема 2** Пространство быстро убывающих функций отображается на себя преобразованием Фурье.

**Доказательство** Рассмотрим произвольную функцию  $f \in \mathcal{S}$ . Очевидно, она принадлежит  $L_2(\mathbb{R})$  (докажите!) Она бесконечно дифференцируема. Следовательно, ее преобразование Фурье убывает быстрее любой степени на бесконечности. Докажем, что для любой функции  $f \in \mathcal{S}$  ее преобразование Фурье бесконечно дифференцируемо. Действительно,

функция  $f$  убывает быстрее любой степени на бесконечности. Тем же свойством обладает функция  $x^m f(x)$  для любого натурального  $m$ . Следовательно, все функции

$$g_k = (ix)^k f(x) e^{-ix\alpha}$$

мажорируются при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$  функцией  $\mathcal{F}(x) = \frac{C_k}{1+x^2}$ . Интеграл этой функции сходится. Значит, интеграл

$$I_k(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k f(x) e^{i\alpha x} dx$$

допускает дифференцирование по  $\alpha$  под знаком интеграла. Это дает:

$$I_{k+1}(\alpha) = I'_k(\alpha).$$

С учетом того, что  $I_0 = \tilde{f}$ , это доказывает теорему.  $\square$

## 4 Свертка

Подобие свертки возникло при изучении  $\delta$ -образных последовательностей. А именно, мы доказали, что если  $\Delta_n$  –  $\delta$ -образная последовательность, а  $f$  – финитная непрерывная функция, то

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \Delta_n(x-y) dx \rightrightarrows f(y).$$

**Замечание 1** В этой теореме финитность можно заменить на ограниченность.

Операция, переводящая пару функций  $f, \Delta_n$  в левую часть соотношения (2) несимметрична. Ее симметричный аналог определяется так:

**Определение 2** Свертка двух функций на прямой (обозначается  $f * g$ ) – это функция

$$f * g : y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y-x) dx.$$

Следующее определение равносильно.

**Определение 3** Рассмотрим дифференциальную 1-форму на плоскости:

$$\omega_x = f(x) g(y) dx$$

Положим:

$$(3) \quad f * g(z) = \int_{l_z} \omega_x.$$

Здесь  $l_z$  – прямая  $x + y = z$ , ориентация которой индуцируется из ориентации оси  $x$  проектированием  $(x, y) \mapsto x$ .

Предполагается, что все участвующие в определении интегралы сходятся.

**Теорема 3** Свертка симметрична:

$$f * g = g * f$$

**Доказательство** По определению,

$$g * f = \int_{l_z} g(x)f(y)dx := \int_{l_z} \omega'_x$$

Симметрия  $s : (x, y) \mapsto (y, x)$  переводит форму  $\omega'_x$  в форму  $\omega_y = f(x)g(y)dy$ . Заметим, что на  $l_z : \omega_x + \omega_y = 0$ . Симметрия  $s$  переводит  $l_z$  в  $-l_z$ . Поэтому

$$\int_{l_z} \omega'_x = \int_{-l_z} s^* \omega'_x = \int_{-l_z} \omega_y = - \int_{-l_z} \omega_x = \int_{l_z} \omega_x.$$

□

## 5 Свертка и преобразование Фурье

**Теорема 4** Преобразование Фурье переводит свертку в произведение и произведение в свертку (последнее – с коэффициентом  $\frac{1}{2\pi}$ ).

**Доказательство** Докажем, что

$$(4) \quad \mathcal{F}(f * g) = \tilde{f}\tilde{g}$$

По формуле (3),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\alpha) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{l_z} f(x)g(y)dx \right) e^{-i\alpha z} dz = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\alpha(x+y)} f(x)g(y)dxdy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\alpha x} f(x) e^{-i\alpha y} g(y) dxdy = \tilde{f}(\alpha)\tilde{g}(\alpha). \end{aligned}$$

Равенство

$$(5) \quad \mathcal{F}(fg) = \frac{1}{2\pi} \tilde{f} * \tilde{g}$$

выводится из (4) и формулы для квадрата преобразования Фурье:  $\mathcal{F}^2 = 2\pi S$ , где  $S$  – оператор обращения аргумента:

$$Sf : x \mapsto f(-x).$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (4). Тогда

$$\mathcal{F}^2(f * g) = S(f * g) = 2\pi \mathcal{F}(\tilde{f}\tilde{g}).$$

Возьмем теперь  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  за исходные функции и обозначим их  $\varphi$  и  $\psi$ . Тогда  $f = \frac{1}{2\pi} S\mathcal{F}\varphi$ ,  $g = \frac{1}{2\pi} S\mathcal{F}\psi$ , и мы получаем формулу:

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi} S(S\mathcal{F}\psi * S\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(\varphi\psi).$$

Осталось доказать, что левая часть равна  $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\psi * \mathcal{F}\varphi$ . Действительно, пусть  $u$  и  $v$  – произвольные функции из  $\mathcal{S}$ ; тогда

$$(7) \quad S(Su * Sv) = u * v.$$

Равенства (6) и (7) влечут (5). Равенство (6) доказано. Докажем (7):

$$S(Su * Sv)(z) = (Su * Sv)(-z) = \int_{l_{-z}} u(-x)v(-y)dx = - \int_{-l_z} u(x)v(y)dx = u * v(z).$$

□

## 6 Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных с краевым условием

$$u_t = u_{x^2}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = f(x).$$

Ищем  $v(t, \alpha) = \mathcal{F}_x u(t, \alpha)$

$$\begin{aligned} v_t &= -\alpha^2 v, \quad v(0, \alpha) = \tilde{f}(\alpha) \\ v(t, \alpha) &= \tilde{f}(\alpha) e^{-t\alpha^2}. \end{aligned}$$

Успех! Преобразование Фурье от искомого решения получено. Остается заведомо выполнимый шаг – обратить преобразование Фурье .

**Важное замечание.** При этом обращении мы ищем преобразования Фурье от функций вида  $f(\lambda\alpha)$ . Эти преобразования имеют вид  $\frac{1}{\lambda}\tilde{f}(\frac{1}{\lambda}x)$ . Такие семейства функций нам уже встречались. При условиях:  $f(0) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $\tilde{f} \geq 0$ , они представляют собой  $\delta$ -образное семейство. Действительно, если  $g \geq 0$  и  $\int_{\mathbb{R}} g = 1$ , то последовательность  $\Delta_n(x) = ng(nx)$  –  $\delta$ -образная. Это – (простая) задача из занятия 3. Но, в силу формулы обращения для преобразования Фурье,  $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} = 2\pi f(0)$ . Правая часть равна 1 при  $f(0) = \frac{1}{2\pi}$ .

Вернемся к решению уравнения теплопроводности. Обращая преобразование Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} S \circ \mathcal{F}_{\alpha} (\tilde{f}(\alpha) e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{(2\pi)^2} S(\mathcal{F}_{\alpha} \tilde{f} \mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} f * S \mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{2\pi} f * \mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2}), \end{aligned}$$

поскольку функция  $\mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2})$  – четная. Далее, как объяснено в замечании выше,

$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

При  $t \rightarrow 0$  это –  $\delta$ -образное семейство. Поэтому  $f * \mathcal{F}_{\alpha}(e^{-t\alpha^2}) \rightarrow f$  при  $t \rightarrow 0$ .

Задача Коши для уравнения теплопроводности решена.