Ряды и преобразования Фурье для голоморфных функций.

1 Напоминания из комплексного анализа.

- Определение голоморфных функций.
- Интеграл Коши.
- Интегральная теорема Коши.
- Обратная теорема (если интеграл не зависит от пути, то функция голоморфна.)

2 Ряды Фурье для голоморфных функций.

Теорема 1 *Коэффициенты Фурье голоморфной функции на окружности убывают экспоненциально. Более подробно, пусть функция f голоморфна в полосе $|\ Im\ z| < \delta$, и в этой полосе $\max|f(z)| = M$. Тогда k-й коэффициент Фурье f_k функции f удовлетворяет неравенству:*

$$|f_k| \leqslant Me^{-\delta|k|}. \tag{1}$$

Доказательство По известной формуле,

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Пусть $k < 0$. рассмотрим прямоугольник Π с вершинами $-\pi, \pi, \pi + i\delta, -\pi + i\delta$ и пусть Γ – его положительно ориентированная граница. Докажем, что

$$f_k = \int_{-\pi+i\delta}^{\pi+i\delta} f(z)e^{-ikz}dz.$$

Действительно, по теорем Коши

$$\int_{\Gamma} f(z)e^{-ikz}dz = 0. \tag{2}$$

Но Γ – ориентированная граница прямоугольника Π, правая вертикальная сторона которого получается из левой переносом на 2π. А подинтегральная функция в интеграле (2) 2π-периодична. Поэтому ее интегралы по (противоположно ориентированным) вертикальным сторонам взаимно уничтожаются, а интегралы по горизонтальным сторонам равны:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-ikz}dz = \int_{-\pi+i\delta}^{\pi+i\delta} f(z)e^{-ikz}dz.$$

Но

$$\max_{[-\pi+i\delta,\pi+i\delta]} |f(z)e^{-kz}| = Me^{-ik\delta}.$$

Отсюда следует (1). $\square$

3 Функция Гаусса – неподвижная точка преобразования Фурье.

Теорема 2 *Функция Гаусса $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ – неподвижная точка нормализованного преобразования Фурье.*

Доказательство Доказательство получается выходом в комплексную область, и дается прямым вычислением.

$$\widetilde{f_0}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2i\alpha x - \alpha^2)} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2} dx := e^{-\frac{\alpha^2}{2}} C(\alpha).$$

Наблюдение 1 *$C(\alpha)$ не зависит от α и равно* 1!

Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\alpha)^2} dx = \int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Поскольку функция $f_0(z)$ в любой полосе $\operatorname{Im} z \in [0, \alpha]$ стремится к нулю при $\operatorname{Re} z \to \pm\infty$, получаем, по интегральной теореме Коши, что

$$\int_{\mathbb{R}+i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

и тем самым, действительно не зависит от α. Итак, для $C = C(\alpha)$

$$\widetilde{f_0}(z) = C f_0(z),$$

то есть функция f_0 – собственная функция для преобразования Фурье с положительным собственным значением. Но преобразования Фурье – изометрия. Следовательно, $C = 1$, $\widetilde{f_0} = f$.

Попутно мы доказали, что

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(формула Эйлера-Пуассона). Действительно,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

□

4 Голоморфность интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3 *Пусть функция f определена на прямом произведении отрезка $\sigma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и области $U \subset \mathbb{C}$ с координатами x на σ и z на U. Пусть функция f непрерывна по совокупности переменных и голоморфна по z при каждом фиксированном значении $x \in \sigma$. Тогда интеграл*

$$I(z) = \int_a^b f(x, z) dx \tag{3}$$

голоморфен по z в области U.

Замечане 1 *По определению, голоморфность означает, что функция I имеет комплексную производную. Но, в отличие от теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла, мы не требуем непрерывности производной $\frac{\partial f}{\partial z}$. Это происходит по двум причинам. Во-первых, эта непрерывность следует из непрерывности f и интегральной формулы для производной голоморфной функции. Во-вторых, непрерывность производной не используется в доказательстве.*

Для доказательства теоремы используется следующее определение голоморфной функции.

Определение 1 *Функция $I : U \to \mathbb{C}$ голоморфна, если ее интеграл по любому C^1-гладкому контуру, стягиваемому в U, равен нулю. Точнее, равен нулю интеграл от 1-формы $I(z)dz$.*

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим произвольный стягиваемый контур $\gamma : [0,1] \to U,\ \gamma(0) = \gamma(1),\ \gamma \in C^1$. По определению,

$$I_0 = \int_\gamma I(z)dz = \int_0^1 I(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{4}$$

По формуле (3), этот интеграл равен

$$I_0 = \int_0^1 dt \int_a^b f(x, \gamma(t))\gamma'(t)dx.$$

Подинтегральная функция во втором интеграле непрерывна по совокупности переменных (x,t) в $\sigma \times [0,1]$. По теореме о равенстве повторных интегралов,

$$I_0 = \int_a^b dx \int_0^1 f(x, \gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Но внутренний интеграл – это интеграл по замкнутому контуру от голоморфной функции $f(x,z),\ x$ фиксировано, $z \in U$:

$$\int_0^1 f(x, \gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(x,z)dz = 0$$

для любого $x \in \sigma$. Следовательно, $I_0 = 0$. В силу произвольности стягиваемого контура γ получаем, что функция I голоморфна. □

Аналогично формулируется и доказывается теорема о голоморфности несобственного интеграла.

5 Голоморфность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 4 *Пусть функция f определена на прямом произведении луча $\sigma = [0, \infty]$ и области $U \subset \mathbb{C}$ с координатами и z на U $x \in \sigma$. Пусть функция f мажорируется на луче σ функцией $\mathcal{F}$ со сходящимся интегралом:*

$$|f(x,z)| < \mathcal{F}(x)\ \forall z \in U, x \in \sigma,\ \textit{причем} \int_\sigma \mathcal{F}(x)dx < \infty.$$

Тогда интеграл

$$I(z) = \int_\sigma f(x,z)dx \tag{5}$$

голоморфен по z в области U.

Доказательство Доказательство получается объединением предыдущего с доказательством теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру. Пусть функция I и интеграл I_0 определены формулами (5) и (4). Вместо равенства $I_0 = 0$ мы докажем, что $|I_0| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда немедленно следует, что $I_0 = 0$.

Возьмем произвольное ε, контур γ и такое N, что

$$\int_N^\infty \mathcal{F}(x)dx < \frac{\varepsilon}{M}, \tag{6}$$

где $M = \max_{[0,1]} |\gamma'|$. Тогда

$$I_0 = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^N dx \int_\gamma f(x,z)dz, \quad I_2 = \int_0^1 dt \int_{\mathcal{F}}^\infty f(x,\gamma(t))\gamma'(t)dx.$$

Поскольку $\mathcal{F}$ мажорирует $f(x,z)$ для любого фиксированного $z \in U$, и выполнена оценка (6), получаем: $|I_2| < \varepsilon$. Равенство $I_1 = 0$ доказано выше. Отсюда следует, что $I_0 = 0$. □

6 Примеры.

Следствие 1 *Преобразование Фурье финитной функции голоморфно на всей плоскости.*

Доказательство Речь идет о функции

$$\widetilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

где функция f финитна. Пусть $\operatorname{supp} f \subset [a,b]$. Переобозначение:

$$\alpha \rightsquigarrow z, \ f(x)e^{-i\alpha x} \rightsquigarrow F(x,z), \ \widetilde{f} \sim I.$$

Функция F голоморфна по z при любом $x \in [a,b]$, и

$$I(z) = \int_a^b F(x,z)dx$$

Следствие вытекает из теоремы 3. □

Следствие 2 *Пусть функция f ограничена, и*

$$supp\ f \subset \mathbb{R}^+ = \{x \geqslant 0\}.$$

Тогда преобразование Фурье функции f голоморфно в нижней полуплоскости.

Это следствие предлагается в качестве задачи. К ее решению дается лишь следующее указание. Функция $f(x)e^{-i\alpha x}$ при всех α из области $\operatorname{Im} \alpha \leqslant \eta < 0$ мажорируется функцией

$$\mathcal{F}(x) = (\sup_{\mathbb{R}^+}|f|)e^{\eta x}, \ \eta < 0.$$

Интеграл этой функции сходится.

Следствие 3 Γ – *функция Эйлера, заданная равенством*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$$

голоморфна в области $Re\ z > 1$.

Это следствие также предлагается в качестве задачи.