# Преобразование Фурье.

## 1 Определение и основные результаты.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Преобразованием Фурье функции $f$ называется функция

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\alpha x} dx \tag{1}$$

Нормированным преобразованием Фурье функции $f$ называется функция

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} \tag{2}$$

Из формулы не очевидно, что преобразование Фурье существует для любой функции $f \in L_2\mathbb{R}$. Это доказано ниже.

Основные результаты сегодняшней лекции таковы:

**Теорема 1 (Равенство Планшереля)** $f \in L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{f} \in L_2(\mathbb{R})$, *и* $||f|| = ||\tilde{f}||$.

**Теорема 2** *Формула обращения:* $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Мы докажем эти теоремы сначала для случая, когда функция $f$ – финитная дважды гладкая, а затем распространим их на все $L_2(\mathbb{R})$.

Преобразование Фурье является континуальным аналогом ряда Фурье. Ряды Фурье определены для функций на окружности, а преобразование Фурье – для функций на прямой. Второе получается из первого предельным переходом по семейству окружностей, длина которых стремится к бесконечности.

## 2 Убывание преобразования Фурье финитной гладкой функции.

**Теорема 3** *Преобразование Фурье финитной функции класса* $C^m$ *убывает не медленнее, чем* $|x|^{-m}$.

Эта теорема доказывается точно так же, как ее аналог для рядов Фурье.

**Доказательство** Преобразование Фурье переводит дифференцирование в умножение на $i\alpha$:

$$\tilde{f'}(\alpha) = i\alpha \tilde{f}(\alpha). \tag{3}$$

Эта формула доказывается с помощью интегрирования по частям. Интегралы пишутся по прямой (и это не указано в обозначениях), но берутся по отрезку, вне которого функция $f$ равна нулю. Возникающие двойные подстановки исчезают, поскольку $f = 0$ на концах отрезка. Иногда преобразование Фурье обозначают символом $\mathcal{F}$, чтобы избежать разночтений. Имеем:

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = \int f'(x) e^{-i\alpha x} dx = \int e^{-i\alpha x} df(x) = -\int f(x) de^{-i\alpha x} dx = i\alpha \int f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathcal{F} f(\alpha).$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{F} f(\alpha) = \frac{1}{i\alpha} \mathcal{F}(f')(\alpha).$$

Индукцией по $m$ получаем:

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{(i\alpha)^m}\mathcal{F}(f^{(m)})(\alpha).$$

Но функция $\mathcal{F}(f^{(m)})$ ограничена, поскольку $f^{(m)}$ непрерывна и финитна. □

**Следствие 1** *Если $f \in C^{2,0}$, то существует $C$:*

$$|\tilde{f}(\alpha)| < \frac{C}{1+\alpha^2}. \tag{4}$$

## 3 Ряды Фурье на "длинной" окружности.

Окружность изображается отрезком с отождествленными концами. Другое представление: функции на окружности "длины $T$" изображаются $T$-периодическими функциями на прямой. Этим представлением мы и воспользуемся.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с периодом $2\pi l$, и найдем ее разложение в ряд Фурье по базису, который будет сейчас построен. Функция $g(x) = f(xl)$ имеет период $2\pi$ и разлагается в классический ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Множители перед $ix$ в показателе экспоненты называются волновыми числами. В обычном ряде Фурье множество волновых чисел совпадает с $\mathbb{Z}$.

По определению функции $g$,

$$f(x) = g\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_k g_k e^{ik\frac{x}{l}} = \sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} c_a e^{i\alpha x} \tag{6}$$

Волновые числа в последнем ряде пробегают множество $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. При большом $l$ это множество гораздо гуще, чем $\mathbb{Z}$. Допуская вольность речи, можно сказать, что при $l \to \infty$ оно стремится к $\mathbb{R}$.

Формула (6) показывает, что векторы $e^{i\alpha x}$, $a \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$ образуют базис в $L_2([-\pi l, \pi l])$. Их нормы равны $\sqrt{2\pi l}$. Следовательно, при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\int_{-\pi l}^{\pi l} f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Отметим, что при $\alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{l}$,

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi l}\tilde{f}(\alpha) \tag{7}$$

Равенство Планшереля для $f$ имеет вид

$$||f||^2 = 2\pi l \sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} |c_\alpha|^2. \tag{8}$$

Разложение $f$ в ряд Фурье дается формулами (6), (7).

## 4 Предельный переход: эвристическое доказательство равенства Планшереля и формулы обращения.

Фиксируем финитную функцию $f \in C^{2,0}$ с носителем $\operatorname{supp} f \subset [-\pi l_0, \pi l_0]$, и для каждого $l > l_0$ рассмотрим ограничение функции $f$ на отрезок $[-\pi l, \pi l]$. Эти ограничения формально – разные функции, но мы будем все их обозначить через $f$.

Докажем равенство Планшереля:

$$||f|| = ||\hat{f}||.$$

Для этого достаточно доказать:

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 \tag{9}$$

В силу (8) и (7),

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi l}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} |\tilde{f}(\alpha)|^2 := \Sigma_l. \tag{10}$$

Выражение $\Sigma_l$ – это интегральная сумма для интеграла

$$\frac{1}{2\pi}||\tilde{f}||^2 = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha := I$$

Сумма соответствует разбиению прямой на отрезки длины $\frac{1}{l}$ с вершинами в точках множества $\frac{\mathbb{Z}}{l}$. С одной стороны, эта сумма стремится к интегралу (это еще надо доказать!), с другой последовательность $\Sigma_l$ стационарна (не зависит от $l$). Это "доказывает" (9).

Аналогично доказывается формула обращения. В силу (6), при $|x| < l$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi l}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x} := S_l.$$

Выражение $S_l$ – интегральная сумма для интеграла

$$I(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Переходя к пределу, как и выше (этот переход тоже нужно обосновать), получаем формулу обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha \tag{11}$$

## 5 Формальное доказательство.

**Лемма 1** *$S_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$ при условии: $f \in C^{2,0}$.*

**Лемма 2** *Если $C^{2,0}$, то $\Sigma_l(x) \to I(x)$ при $l \to \infty$.*

Из предыдущих рассуждений и леммы 1 следует теорема Планшереля, а из леммы 2 – формула обращения.

**Доказательство** Леммы 1. Если бы интеграл $I$ был собственным, стремление интегральной суммы к интегралу было бы следствием теории интеграла Римана. Нам нужно "справиться" с несобственным интегралом. Это делается с помощью оценок.

В силу следствия 1, существует $C > 0 : |\tilde{f}(\alpha)| < C(1+\alpha^2)^{-1}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и такое $N$, что

$$\frac{1}{l}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}|\tilde{f}(\alpha)|^2 < \frac{1}{l}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}\setminus[-N,N]}\frac{C}{(1+\alpha^2)^2} < C\int_{|\alpha|\geqslant N-\frac{1}{l}}\frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\int_{|\alpha|\geqslant N}|f(\alpha)|^2 d\alpha < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем $l$ столь большое, что

$$\left|\frac{1}{l}\sum_{\alpha\in\frac{\mathbb{Z}}{l}|,\ \alpha|\leqslant N}|\tilde{f}(\alpha)|^2 - \int_{|\alpha|\leqslant N}|\tilde{f}(a)|^2 dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\left|S_l - ||\tilde{f}||^2\right| < \varepsilon$. □

Аналогично доказываетсмя лемма 2.

**Вывод.** Доказаны теоремы 1 и 2: равенство Планшереля и формула обращения для финитных гладких функций $f$.

**Цель:** доказать то же для всех $f \in L_2$.

## 6 Операторы и их продолжение.

**Определение 1** *$A : H \to H$ – линейный оператор, если $A(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha A(\xi) + \beta A(\eta)$.*

**Определение 2** *$A$ – изометрия, если $||A\xi|| = ||\xi||$ $\forall \xi \in H$ $A$ – линейный по умолчанию.*

**Теорема 4** *Пусть $E$ – плотное множество в $H$, $A : E \to E' \subset H$ – изометрия. Тогда $A$ продолжается на $H$ до изометрии $\mathcal{A} : H \to H$.*

**Доказательство** Пусть $x \in H$, $(x_r) \subset E$, $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Пусть $y_n = Ax_n$. Тогда $(x_n)$ – фундаментальная последовательность $\Rightarrow (y_n)$ – тоже фундаментальная последовательность. Пусть $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Положим $\mathcal{A}(x) = y$.

**Упражнение 1** *$\mathcal{A}$ корректно определено: $y$ зависит только от $x$, а не от $x_n \to x$.*

$\mathcal{A}$ – изометрия, поскольку $||y_n|| = ||x_n|| \Rightarrow ||y|| = ||x||$. □

Тем самым, преобразование Фурье продолжается на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ как изометрия, то есть на всем этом пространстве справедлива формула Планшереля.

Формула обращения распространяется на все пространство $L_2(\mathbb{R})$ аналогично. А именно, пусть $S : f(x) \mapsto f(-x)$ -оператор обращения аргумента. Формула обращения эквивалентна следующей:

$$\mathcal{F}^2 = 2\pi S.$$

Операторы в правой и левой части этого равенства - изометрии. Их совпадение на плотном множестве $C^{2,0}$ влечет их совпадение на всем пространстве $L_2(\mathbb{R})$.