Интегралы, зависящие от параметра

1 Quiz 1 (20 минут)

2 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Имеем:

$$f : K = I \times I \to \mathbb{R},\ f \in C^1(K). \tag{1}$$

Рассмотрим

$$g(y) = \int_0^1 f(x,y)dx. \tag{2}$$

Верно ли, что $g \in C^1(K)$? ДА!

Теорема 1 *В условиях* (1), (2), $g \in C^1(K)$ *и* $g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

3 Что легче, дифференцировать или интегрировать?

Теорема 2 (Интегрирование под знаком интеграла) *Рассмотрим* $\varphi : K \to \mathbb{R},\ \varphi \in C^0$ *Пусть*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi,\ \psi(y) = \int_0^1 \varphi(x,y)dx \quad \Psi'(y) = \psi. \tag{3}$$

Тогда

$$\Psi(y) = \int_0^1 \Phi(x,y)dx \tag{4}$$

Доказательство Теоремы 2. Повторный интеграл непрерывной функции по прямоугольнику не зависит от порядка интегрирования. □

Более подробное доказательство.

По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\Phi(x,y) = \int_0^y \varphi(x,t)dt,\ \Psi(y) = \int_0^y \psi(t)dt.$$

Тогда

$$\Psi(y) = \Psi(0) + \int_0^y dt \int_0^1 \varphi(x,t)dx = \int_0^1 dx \left(\Phi(x,0) + \int_0^y \varphi(x,t)dt\right) = \int_0^1 \Phi(x,y)dx,$$

ч.т.д.

Но если можно интегрировать под знаком интеграла, значит можно и дифференцировать! Это доказывает Теорему 1.

4 Более подробное доказательство Теоремы 1

Доказательство Положим

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y), \quad f(x,y) = \Phi(x,y), \quad g(y) = \Psi(y).$$

Тогда:

$$\psi(y) = \int_0^1 \varphi(x,y)dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \qquad \Psi(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \Phi(x,y)dx$$

В силу Теоремы 2,

$$\Psi'(y) = \psi(y).$$

Значит,

$$g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

□

Следствие 1 *При наличии необходимых производных,*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx + b'(y)f(b(y),y) - a'(y)f(a(y),y).$$

Доказательство Применим теорему о дифференцировании сложной функции к $F(a,b,y) = \int_a^b f(x,y)dx$ и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница. □

5 Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение 1 *Скажем, что функция $\mathcal{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ мажорирует семейство $\{f_y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+|,\ y \in A\}$, если существует такое x_0, что $|f_y(x)| \leqslant \mathcal{F}(x)\ \forall x > x_0,\ y \in A$.*

Теорема 3 *Пусть $\mathcal{F}$ мажорирует семейство $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+)|y \in [a,b]\}$, и интеграл $\int_0^\infty \mathcal{F}(x)dx$ сходится. Тогда возможно интегрирование под знаком интеграла. А именно, пусть*

$$g(y) = \int_0^\infty f_y(x)dx,\ f_y(x) = f(x,y) \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f_y(x), \tag{6}$$

$$G'(y) = g(y),\ G(0) = \int_0^\infty F(x,0)dx. \tag{7}$$

Тогда

$$G(y) = \int_0^\infty F(x,y)dx \tag{8}$$

Доказательство Пусть для простоты $a = 0$, $b > 0$. Интегралы в правой части (5) сходятся по признаку сравнения. Рассмотрим

$$g_N(y) = \int_0^N f(x,y)dx$$

$$G'_N(y) = g_N(y),\ G_N(0) = \int_0^N F(x,0)dx.$$

По теореме 1,

$$G_N(y) = \int_0^N F(x,y)dx$$

Далее, выберем N так, что

$$\int_N^\infty \mathcal{F}(x)dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_0^y dt \int_N^\infty f(x,t)dx\right| < \varepsilon y$$

Значит,

$$|g_N(y) - g(y)| < \varepsilon y$$

$$|G_N(y) - G(y)| < \varepsilon y.$$

$$\int_0^y g_N(t)dt - G_N(y) = 0$$

по теореме 1. Следовательно,

$$\left|\int_0^y g(t)dt - G(y)\right| < 2\varepsilon y\ \forall\varepsilon.$$

Поэтому модуль в левой части равен нулю. □

6 Дифференциование под знаком несобственного интеграла.

Теорема 4 *Пусть $\mathcal{F}$ мажорирует два семейства $\{f_y \in C(\mathbb{R}^+)|y \in [a,b]\}$ и $\{\frac{\partial f_y}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^+)|y \in [a,b]\}$, и интеграл $\int_0^\infty \mathcal{F}(x)dx$ сходится. Тогда возможно дифференцирование под знаком интеграла. А именно, пусть*

$$G(y) = \int_0^\infty f_y(x)dx.$$

Тогда

$$G'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial f_y}{\partial y}(x)dx.$$

Эта теорема выводится из теоремы 3 точно так же, как теорема 1 из теоремы 2.

7 Решение линейных уравнений в виде интегралов, зависящих от параметра

Теорема 5 *Пусть функция K дифференцируема по x, y, L_y – линейный дифференциальный оператор, например*

$$L_y = A(y)D_y^2 + B(y)D_y + C(y) : g \mapsto Ag'' + Bg' + Cg;$$

K – дважды гладкая функция. Пусть $I(y) = \int_a^b K(x,y)dx$. Тогда

$$L_y I(y) = \int_a^b L_y K(x,y)dx.$$

На этом пути получаются интегральные представления для решений уравнения $L_y f = 0$. А именно, пусть функция K такова, что удается найти функцию G и числа a и b так, что

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \equiv L_y K(x,y)$$

и

$$G(a,y) \equiv G(b,y) \equiv 0.$$

Тогда функция

$$I(y) = \int_a^b K(x,y)dx$$

удовлетворяет уравнению $L_y I = 0$.