δ-образные последовательности и теоремы о приближении

1 δ-функция Дирака.

В 30-е годы прошлого века великий физик Поль Дирак ввел и использовал δ-функцию, обладающую следующими свойствами.

- $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$;
- $\delta(x) = \infty$ при $x = 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) = 1$.

Разумеется, такой функции не бывает. Тем не менее, для нее может быть "доказана"

Теорема 1 *Для любой непрерывной функции $f \in C(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0)$.*

Доказательство По теореме о среднем, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(c)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = f(c)$. При $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$, а интеграл с одной стороны, не меняется, а с другой, стремится к $f(0)$. $\square$

2 δ-образная последовательность.

Формализацией понятия δ-функции служит δ-образная последовательность.

Определение 1 *Последовательность (Δ_n) непрерывных или кусочно-непрерывных функций на прямой называется δ-образной последовательностью, если выполняются следующие требования:*

a) $\Delta_n \geqslant 0$ *b)* $\int_{\mathbb{R}} \Delta_n \to 1$ *c)* $\forall \varepsilon > 0 \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n \to 0$.

Когда область интегрирования не указана, это — по умолчанию $\mathbb{R}$.

Теорема 2 *Для любой финитной непрерывной функции f, и δ-образной последовательности Δ_n выполнено $(f, \Delta_n) \to f(0)$ при $n \to \infty$, где $(f, \Delta_n) = \int f(x)\Delta_n(x)dx$.*

Доказательство $(f, \Delta_n) = I_n + J_n$, $I_n = \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$, $J_n = \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]} f(x)\Delta_n(x)dx$

$$I_n \leqslant |\text{supp } f| \cdot \max|f| \cdot \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx \to 0,\ n \to \infty.$$

Здесь $|\text{supp } f|$ – длина носителя f. По теореме о среднем, применимой, поскольку $\Delta_n \geqslant 0$,

$$J_n = f(c)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx.$$

Значение $f(c)$ близко к $f(0)$ при малом ε, а значение $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_n(x)dx$ близко к 1 при большом n. Следовательно, I_n мало, а J_n близко к $f(0)$. $\square$

3 Равномерность сходимости.

Следствие 1 *Пусть $f \in C^0(\mathbb{R})$, Δ_n – δ-образная последовательность. Тогда $f_n(x) = \int f(x)\Delta_n(x-y)dx \to f(y)$.*

Теорема 3 *В условиях следствия, стремление $f_n \rightrightarrows f$ равномерно.*

Доказательство Хотим доказать, что: $\forall \alpha > 0 \exists N$:

$$|f_n(y) - f(y)| < \alpha \ \forall n > N. \tag{1}$$

Берем ε так, что $\operatorname{osc}_{[y-\varepsilon,y+\varepsilon]} f < \frac{\alpha}{2}$ $\forall$ y. Такое ε существует, поскольку f финитна. Берем N так, что $\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \Delta_n(x)dx < \frac{\alpha}{2}$ $\forall n > N$. Такое N существует по c). Тогда (1) выполнено. □

4 Важные δ-образные последовательности.

Пусть $\varphi \in C^{2,0}(\mathbb{R})$ – *унмодулярная* функция, $\varphi(0) = 1$. Унимодулярность значит, что $\operatorname{sign} \varphi' = -\operatorname{sign} x$. График функции φ напоминает колокол, φ имеет максимум в нуле.

Теорема 4 *Положим:*

$$\Delta_n = \frac{\varphi^n}{\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x)dx}. \tag{2}$$

Тогда Δ_n – δ-образная последовательность.

Доказательство Из унимодулярности φ следует неотрицательность:

$$\varphi \geqslant 0.$$

Кроме того, $\varphi(x) < 1$ $\forall x \neq 0$.

Требование b определения 1 $\int_{\mathbb{R}} \Delta_n(x)dx \to 1$ выполнено по определению. Осталось проверить требование c.

Для любого ε

$$\max_{|x|\geqslant\varepsilon} \varphi(x) = q(\varepsilon), 0 < q(\varepsilon) < 1.$$

Положим: $I_n = \int \varphi^n(x)dx$. На множестве $|x| \geqslant \varepsilon$,

$$|\Delta_n(x)| \leqslant \frac{q^n(\varepsilon)}{I_n} := \lambda_n(\varepsilon). \tag{3}$$

Тогда

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \Delta_n(x)dx \leqslant \lambda_n(\varepsilon)|\operatorname{supp} \varphi|.$$

Предложение 1 *В условиях теоремы, $\lambda_n(\varepsilon) \to 0$ $\varepsilon > 0$.*

Теорема 4 немедленно следует из предложения 1. □

Доказательство [предложения 1.] Фиксируем $\varepsilon > 0$. Числитель дроби стремится к нулю экспоненциально. Докажем, что знаменатель больше некоторой отрицательной степени n: существует такое c, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^n(x)dx \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

для всех достаточно больших n. Тогда дробь (3) стремится к нулю, потому что экспонента убывает быстрее любой степени.

Из унимодулярности функции φ следует, что для малых $x : |x| \leqslant x_0$, существует такое C, что

$$\varphi(x) \geqslant 1 - Cx^2.$$

Тогда при больших n, имеем: $|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < x_0$,

$$\varphi(x) \geqslant 1 - \frac{C}{n}.$$

Следовательно, при $|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$,

$$\varphi^n(x) \geqslant \left(1 - \frac{C}{n}\right)^n = i_n.$$

Имеем:

$$i_n \to e^{-C} \text{ при } n \to \infty$$

Поэтому,

$$I_n \geqslant 2\frac{i_n}{\sqrt{n}} > \frac{c}{\sqrt{n}}$$

при достаточно большом n, где

$$c = 3^{-C}.$$

Это доказывает предложение. □

5 Примеры.

Следующие две δ-образных последовательности используются при доказательстве теорем Вейерштрасса.

Возьмем

$$\varphi(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}. \tag{5}$$

Последовательность (2) с таким φ является δ-образной.

Эта последовательность важна потому, что на множестве $|x-y| < 1$, функция $\Delta_n(x-y)$ – многочлен по y.

Возьмем

$$\varphi(x) = (\cos x - 1)\chi_{[-\pi,\pi]}. \tag{6}$$

Последовательность (2) с таким φ тоже является δ-образной.

Каждая функция этой последовательности – тригонометрический многочлен по y при $|x - y| < \pi$.

6 Приближение многочленами.

Теорема 5 (Вейерштрасс) *Непрерывную функцию на отрезке можно равномерно приблизить многочленами.*

Доказательство Сдвигом и гомотетией переведём отрезок определения в $[0,1]$. Рассмотрим полученную выше δ-образную последовательность $\Delta_n(x) = P_n(x)\chi_{[-1,1]}$, где $P_n(x) = (1-x^2)^n / \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Тогда $\Delta_n(x-y) = P_n(x-y)\chi_{[-1+y,1+y]}$.

При фиксированном x, имеем $P_n(x-y) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k(x)y^k$. Далее, $\Delta_n(x-y) = \sum a_k(x)y^k$, если $|x-y| \leqslant 1$. Берем финитную функцию $f \in C^0$, $\operatorname{supp} f \subset [0,1]$ При $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ имеем: $|x-y| \leqslant 1$. Следовательно, при таких x и y, $\Delta_n(y-x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k(x)y^k$. Далее, для любого y,

$$f_n(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\Delta_n(x-y)dx = \int_0^1 f(x)\sum_{k=0}^{2n} a_k(x)y^k dx = \sum_{k=0}^{2n} b_k Y^k,\ b_k = \int_0^1 f(x)a_k(x)dx.$$

По теореме 3, $f_n(y) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$. Но на отрезке $[0,1]$ функции f_n – многочлены. $\square$

Теорема 6 *Тот же результат, но "многочлены" $\rightsquigarrow$ "тригонометрические многочлены".*

Доказательство Доказательство аналогично, только в этом случае $\Delta_n(x) = \frac{(1+\cos x)^n}{I_n}$, где $I_n = \int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^n dx$. В предыдущем доказательстве $[-1,1]$ заменяется на $[-\pi,\pi]$, а $[0,1]$ на $[0,\pi]$. $\square$