До каких пор можно обобщать теорему Пифагора?

1 От Пифагора до Планшереля

Различные формулировки теоремы Пифагора:

a) на плоскости: $a^2 + b^2 = c^2$;

b) в евклидовом пространстве: $|\xi|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

c) для рядов Фурье: $f \in C[-\pi, \pi]$ или $(L_2[-\pi, \pi])$ $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum_k |c_k|^2; \tag{1}$$

d) для преобразований Фурье: $f \in L_2(\mathbb{R}),\ \hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\alpha x}dx$

$$||\hat{f}|| = ||f|| \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называются *равенствами Планшереля.*

2 Теорема Рисса в вещественном гильбертовом пространстве.

Определение 1 *Система (e_n) полна в H, если ее линейные комбинации плотны в H.*

Теорема 1 *Пусть H – гильбертово пространство, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ – ортонормированный базис в H; система (e_n) полна. Тогда любой элемент $x \in H$ разлагается в ряд $x = \sum c_k e_k$, где $c_k = (x, e_k)$.*

Доказательство Для любого n справедливо соотношение: $r_n = x - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k \perp e_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Отсюда следует: $||x||^2 = ||r_n||^2 + \sum c_k^2 \Rightarrow \sum_k c_k^2 \leqslant ||x||^2$ – неравенство Парсеваля.

Пространство H полно. Последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

фундаментальна. Следовательно, она сходится. Пусть $y = \lim x_n$.

Утверждение 1 $y = x$.

Пусть нет. Тогда $z = x - y \neq 0,\ z \perp e_k$ для всех k. Но линейные комбинации e_k плотны в H. Приблизим z последовательностью таких комбинаций:

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} e_k \to z.$$

Тогда

$$0 = (z, \sum_k a_{k,n} e_k) = (z, w_n) \to (z, z).$$

Следовательно, $z = 0$. Итак,

$$x = y = \sum_k c_k e_k.$$

□

Следствие 1 $||x||^2 = \sum c_k^2$ – *формула Планшреля*

3 Самый знаменитый ортогональный базис на $[-\pi, \pi]$

Таковым мы называем базис (SC), составленный $\cos nx$, $n \geqslant 0$ и $\sin nx$, $n > 0$.

Попарная ортогональность: будет проверена потом. Полнота следует из теоремы Вейерштрасса:

Теорема 2 *Любая непрерывная периодическая функция на $[-\pi, \pi]$ может быть (равномерно) приближена тригонометрическими многочленами.*

Непрерывные периодические функции плотны в L_2. Следовательно, система (SC) полна в L_2.

4 Разложение по ортогональной ненормированной системе

Разберём случай, когда (e_k) попарно ортогональны, но $(e_k, e_k) \neq 1$.

$$f = \sum_k c_k e_k,\ (x, e_k) = c_k(e_k, e_k) \Rightarrow c_k = \frac{1}{(e_k, e_k)}(x, e_k).$$

Приложение к разложению по системе (SC):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно,

$$f(x) = a_0 + \sum_k b_k \sin kx + a_k \cos kx$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\cos kx dx,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int f(x)\sin kx dx.$$

5 Еще более знаменитый базис в $L_2([\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Положим для краткости: $[\pi, \pi] = \sigma$ и рассмотрим пространство $L_2(\sigma, \mathbb{C})$, которое является пополнением пространства непрерывных функций $f : \sigma \to \mathbb{C}$ по норме, заданной скалярным произведением

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx. \tag{3}$$

Возьмём базис (E), составленный e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$.

Ортогональность:

$$I = \left\langle e^{inx}, e^{imx} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \begin{cases} 2\pi,\ n = m \\ 0,\ n \neq m \end{cases}$$

Проверка:

$$n \neq m : I = \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Следовательно,

$$f(x) = c_k e^{ikx},\ c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \tag{4}$$

Ортогональность базиса (SC) следует из ортогональности базиса (E) и формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x = i\sin x$$

Следовательно,

$$e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$$

Полнота системы (E) следует из полноты системы (SC) и формулы Эйлера.

6 Эрмитовы пространства.

Определение 2 *Эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$:*

a) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (\xi,\eta) \mapsto \langle \xi,\eta\rangle$,

$\mathbb{C}$ *– линейно по* ξ*, антилинейно по* η*:*

$$\langle \lambda\xi,\eta\rangle = \lambda\langle xi,\eta\rangle = \langle \xi,\bar{\eta}\rangle .$$

b) Антисимметрия

$$\langle \xi,\eta\rangle = \overline{\langle \eta,\xi\rangle}$$

c) Положительность: $\langle \xi,\xi\rangle \geqslant 0\ (= 0 \Leftrightarrow \xi = 0)$

Ортонормированный базис: $e_1,\ldots,e_n,\ \langle e_i,e_i\rangle = \delta_{ij}$. Пусть $\xi = \sum z_k e_k,\ \eta = \sum w_k, e_k$. Тогда $\langle \xi,\eta\rangle = \sum z_k \bar{w}_k$

Следует из аксиом и влечет аксиомы.

Упражнение. Формула (3) задает эрмитово скалярное произведение.

7 Общий вид линейного функционала l в $\mathbb{C}^n$

. Рассмотрим гиперплоскость $\mathcal{L} = (l = 0)$. Возьмем $n \perp \mathcal{L},\ \langle n,n\rangle = 1;\ \eta = \overline{l(n)}\cdot n$. Произвольный вектор x разлагается в сумму $\xi + \alpha n,\ \xi \in \mathcal{L}$. Тогда $l(\xi+\alpha n) = \alpha l(n)$. Но $< x,\eta >= \left\langle \xi+\alpha n, \overline{l(n)}n\right\rangle = \alpha l(n)$. Следовательно, $l(x) =< x,\eta >$.

8 Гладкость функций и убывание коэффициентов Фурье.

Теорема 3 *Пусть функция $f \in C^m(S^1), c_k$ – ее коэффициенты Фурье. Тогда $|c_k| < C|k|^{-m}$.*

Доказательство Пусть d_k – коэффициенты Фурье функции f'. Тогда, в силу (4),

$$2\pi d_k = \int_{S^1} f'(x)e^{-ikx}dx = \int_{S^1} e^{-ikx}df(x) = -ik\int_{S^1} f(x)e^{-ikx}dx = -ik\cdot 2\pi c_k$$

Из равенства Планшереля следует: существует такое $C > 0$, что $|d_k| < C$ (и даже $d_k \to 0$). Следовательно, $|c_k| < \frac{C}{|k|}$.

Дальше – индукция по m □

Следствие 2 *Ряд Фурье дважды гладкой функции сходится к ней равномерною*

9 Аналитичность (будет рассказана в лекции 6)

Теорема 4 $f \in C^\omega(S^1) \Rightarrow |c_k| < Ce^{-\delta|k|}$.

Доказательство f голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}| \leqslant \delta$ и в ней $|f| < M$. Имеем:

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{ikz}dz = \int_{\sigma+i\delta}^{k<0} f(x+i\delta)e^{-ikx} \cdot e^{-k\delta}dx \leqslant 2\pi M e^{-k\delta}.$$

$\square$