Уравнения Максвелла и волновое уравнение.

1 Задача Коши для уравнений Максвелла.

В этой лекции уравнения Максвелла рассматриваются в области, свободной от токов и зарядов. В этой области они имеют вид:

$$\text{div } E = 0;\ \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\text{div } B = 0;\ c^2\text{rot } B = \frac{\partial E}{\partial t}, \tag{2}$$

Электромагнитные волны распространяются в пространстве $\mathbb{R}^3$. Зная начальное состояние: значения E_0 и B_0 полей E и B при $t = 0$ (это два векторных поля в $\mathbb{R}^3$), мы хотим найти E и B при всех $t \geqslant 0$ (а можно и при $t \leqslant 0$). Для этого к уравнениям (1) и (2) нужно добавить начальные условия:

$$E|_{t=0} = E_0,\ B|_{t=0} = B_0. \tag{3}$$

Всюду ниже считаем для простоты что эти начальные условия финитны.

2 Задача Коши для волнового уравнения.

Как сказано в предыдущей лекции, уравнения Максвелла влекут волновое уравнение на E и B. Напишем первое из них:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = C^2 \Delta E \tag{4}$$

В силу (3), нам известны следующие условия при $t = 0$:

$$E|_{t=0} = E_0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}|_{t=0} = c^2\text{rot } B_0. \tag{6}$$

Теорема 1 *Решение уравнения* (4) *с C^2-гладкими финитными начальными условиями* (5), (6) *существует и единственно.*

Эта теорема доказана ниже.

Итак, два из четырех уравнений Максвелла уже однозначно определяют поля E и B по заданным начальным условиям. Почему же выполняются другие два – уравнения бездивергентности?

3 Совместимость уравнений Максвелла.

Теорема 2 *Система уравнений Максвелла* (1), (2) *с начальными условиями* (3) *совместна.*

Доказательство Рассмотрим функцию div E. Она удовлетворяет волновому уравнению. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять дивергенцию от обеих частей уравнения (4) и воспользоваться тем, что *дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами коммутируют.* Это важное утверждение – далеко идущее обобщение теоремы о равенстве смешанных производных.

Начальные условия на div E – нулевые. Действительно,

$$\text{div } E|_{t=0} = \text{div } E_0 = 0,$$

поскольку E бездиврентно. Далее,

$$\text{div } \frac{\partial E}{\partial t}_{t=0} = \text{div rot } B_0 = 0$$

в силу известного тождества векторного анализа. Тем самым, div E удовлетворяет волновому уравнению с нулевыми начальными условиями. По теореме единственности, div $E \equiv 0$.

Мы доказали, что решение волнового уравнения с бездивергентными начальными условиями само бездивергентно.

Аналогично доказывается бездиврентность решения уравнения

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \Delta B$$

с начальными условиями

$$B|_{t=0} = B_0, \text{div } B_0 = 0$$

$$B_t|_{t=0} = -\text{rot } E_0.$$

Это доказывает совместимость уравнений Максвелла. □

4 Теорема существования и единственности для волнового уравнения.

Теорема 1 доказывается с помощью преобразования Фурье. Оно сводит волновое уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению,для которого существование и единственность решений доказана в общем виде.

Доказательство теоремы 1 Отметим, что преобразование Фурье функций от многих переменных осуществляется так же, как для функций одной переменной. В мультииндексных обозначениях, для $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье определяется формулой

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

Формула Планшереля:

$$||\tilde{f}||^2 = (2\pi)^n ||f||^2$$

Формула обращения:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Взятие частной производной переходит при преобразовании Фурье в умножение на соответствующую переменную с коэффициентом $-i$:

$$\mathcal{F}(D_j f) = -i\alpha_j \tilde{f}.$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{F}(\Delta f) = -\alpha^2 \tilde{f}.$$

Положим: $\tilde{v}(\alpha, t) = \mathcal{F}_x u(x, t)$. Волновое уравнение теперь принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t^2} = -a^2\alpha^2\tilde{v}. \tag{7}$$

Это – зависящее от параметра α обыкновенное дифференциальное уравнение на $\tilde{v}$ как функцию от t.

Начальные условия:

$$\tilde{v}|_{t=0} = \mathcal{F}(u|_{t=0}) = \tilde{\varphi},\ D_t\tilde{v}|_{t=0} = \mathcal{F}(D_t u|_{t=0}) = \tilde{\psi}. \tag{8}$$

Решение этой задачи сейчас будет выписано явно. Но еще до этого очевидна единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в классе функций, финитных по x. Она следует из единственности решения задачи Коши (7), (8).

Явное решение. Задача Коши для линейного уравнения $\ddot{v} = \omega^2 v$ решается так:

$$v(t) = v(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}v'(0)\sin\omega t. \tag{9}$$

Отсюда:

$$v(\alpha, t) = \varphi(\alpha)\cos|a\alpha|t + \frac{1}{|a\alpha|}\psi(\alpha)\sin|a\alpha|t. \tag{10}$$

Решение исходной задачи Коши получается отсюда с помощью формулы обращения:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} v(\alpha, t)e^{i\alpha x}d\alpha, \tag{11}$$

где v дается формулой (10).

Это доказывает теорему 1. □

В теории уравнений с частными производными отсюда выводится формула для решения задачи Коши в виде свертки начального условия – но не с обычными, а с обобщенными функциями. Это – формула Пуассона при $n = 2$, Кирхгофа при $n = 3$ и Герглотца-Петровского при $n \geqslant 4$. Самый элементарный вид эта формула имеет при $n = 1$. Она называется в этом случае формулой Даламбера и выведена в следующем разделе.

5 Формула Даламбера.

Волновое уравнение в одномерном пространстве описывает колебания струны и называется *уравнением струны.*

Задача Коши для уравнения струны имеет вид:

$$u_{t^2} = a^2 U_{x^2},\ u|_{t=0} = \varphi,\ u_t|_{t=0} = \psi.$$

Предположим, что функции φ и ψ финитны. По формулам предыдущего раздела,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} v(\alpha,t)e^{i\alpha x}d\alpha,$$

где

$$v(\alpha,t) = \tilde{\varphi}(\alpha)\cos a\alpha t + \frac{1}{a\alpha}\tilde{\psi}(\alpha)\sin a\alpha t; \tag{12}$$

мы сняли модуль с α, поскольку функция $\frac{\sin\alpha T}{\alpha}$ – четная.

Найдем обратное преобразование Фурье от каждого из слагаемых. Функция $\cos a\alpha t$ при каждом фиксированном t не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^1)$. Поэтому принцип: умножение при преобразовании Фурье переходит в свертку – для первого слагемого не действует.

Однако действует формула сдвига:

$$\cos a\alpha t = \frac{1}{2}(e^{ia\alpha t} + e^{-ia\alpha t}).$$

Поэтому:

$$\int_{\mathbb{R}^1}\tilde{\varphi}(\alpha)\cos a\alpha t e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1}\tilde{\varphi}(\alpha)e^{i\alpha(+\alpha t)}d\alpha + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1}\tilde{\varphi}(\alpha)e^{i\alpha(x-\alpha t)}d\alpha = \frac{1}{2}(\varphi(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t)).$$

Последнее равенство следует из формулы обращения.

Напротив, для второго слагаемого связь умножения и свертки применима. Действительно, функция $\frac{1}{a|\alpha|}\sin a\alpha t$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^1)$ и даже является "табличным преобразованием Фурье".

$$\mathcal{F}(\chi_{[-T,T]}) = 2\frac{\sin\alpha T}{\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin a\alpha t}{a\alpha} = \frac{1}{2a}\mathcal{F}(\chi_{[-at,at]}).$$

Следовательно,

$$\tilde{\psi}(\alpha)\frac{\sin a\alpha t}{a\alpha} = \frac{1}{2a}\mathcal{F}(\chi_{[-at,at]} * \psi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau\right).$$

Беря обратное преобразование Фурье от второго слагаемого в формуле (12), получаем:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau.$$

Это и есть формула Даламбера.

Уравнение струны является моделью для волнового уравнения в высших размерностях. Это последнее уравнение составляет важную главу в теории уравнений с частными производными и в электродинамике.