

Векторный анализ и уравнения Максвелла.¹

В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке будет выглядеть мелким провинциальным происшествием.

Р.Фейнман, 5 с.27.

1 Уравнения Максвелла.

В 1860-е годы Максвелл нашел уравнения, описывающие динамику электромагнитного поля. Фейнман назвал это открытие величайшим историческим событием XIX столетия.

Уравнения описывают динамику двух векторных полей в трехмерном пространстве: поля электрической напряженности E и магнитной B . Уравнения написаны в локальных терминах как соотношения на производные, но выражают глобальные физические законы. В вакууме, в области свободной от зарядов и токов, они имеют вид:

Локальные формулировки

I. $\operatorname{div} E = 0$

II. $\operatorname{rot} E = \frac{\partial B}{\partial t}$

III. $\operatorname{div} B = 0$

IV. $c^2 \operatorname{rot} B = \frac{\partial E}{\partial t}$

Глобальные формулировки

Поток E через замкнутую поверхность равен заряду внутри нее, умноженному на константу.

Интеграл от E по замкнутому контуру противоположен скорости изменения потока магнитного поля через этот контур.

Поток B через замкнутую поверхность равен нулю.

Интеграл от B по замкнутому контуру, умноженный на c^2 , равен скорости изменения потока поля E через контур в области, свободной от токов (движущихся зарядов).

Эти уравнения записаны языком векторного анализа. Они же способствовали созданию этого языка.

Наша цель – научиться отвечать на вопросы:

- как из перечисленных глобальных физических закономерностей следуют локальные?
- что такое “поток векторного поля через контур”?
- как решаются уравнения Максвелла?

¹Эта лекция была написана задолго до предыдущей, и вся ее центральная часть уже рассказана на предыдущей лекции. Однако текст представляет собой единое целое, и я не стал его менять. Новыми в этой лекции являются только разделы, касающиеся уравнений Максвелла

2 Работа и ротор, поток и дивергенция.

Если в области пространства \mathbb{R}^n , в которой НЕ выбраны координаты, задана k -форма и ориентированная компактная k -мерная гладкая поверхность – сразу возникает интеграл от этой формы по этой поверхности.

Задание векторного поля тоже не требует координат. Если заданы векторное поле и ориентированная замкнутая кривая, возникают ли следующие величины:

- работа поля по заданной кривой?
- поток поля через эту кривую?

Этими вопросами мы сейчас и займемся.

Рассмотрим пространство \mathbb{R}^n с заданной в нем евклидовой структурой.

Определение 1 Работа векторного поля v по параметризованной кривой $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ выражается интегралом

$$w(v, \gamma) = \int_0^1 (v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

где (ξ, η) – скалярное произведение векторов ξ и η .

Определение 2 Потоком векторного поля v в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n через гиперповерхность S (с краем или без) называется интеграл по площади поверхности от скалярного произведения векторного поля на единичную нормаль к поверхности S :

$$F(v, S) = \int_S (v, n)(x) ds_x,$$

где ds_x – элемент площади поверхности.

Следующие определения даются в координатах, как это было принято в классическом анализе.

Определение 3 Пусть поле v имеет компоненты X, Y, Z . Тогда

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется бездивергентным.

Определение 4 Пусть попрежнему поле v имеет компоненты X, Y, Z . Тогда

$$\operatorname{rot} v = (Z_y - Y_Z, X_z - Z_x, Y_x - X_y).$$

Для запоминания часто используют формулу

$$\operatorname{rot} v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ X & Y & Z \end{pmatrix}.$$

Здесь D_j – оператор дифференцирования вдоль векторного поля e_j .

Определение 5 Градиент функции f в точке x евклидова пространства – это вектор $\operatorname{grad} f(x) \in T_x \mathbb{R}^n$, скалярное произведение на который равно дифференциальному функции в точке x :

$$df_x(\xi) = (\operatorname{grad} f(x), \xi).$$

Поле градиента функции называется потенциальным, а сама функция – потенциалом.

3 Основные формулы векторного анализа.

Формула Гаусса – Остроградского.

Пусть S – замкнутая поверхность в \mathbb{R}^n , Ω – ограниченный ею объем, v – гладкое векторное поле. Тогда поток поля через поверхность равен интегралу дивергенции поля по объему, ограниченному поверхностью:

$$(1) \quad F(S, v) = \int_{\Omega} \operatorname{div} v dV_x,$$

где V_x – элемент объема в \mathbb{R}^n .

Формула Стокса.

Пусть γ – замкнутая кривая в \mathbb{R}^3 , S – ограниченная ею поверхность. Тогда работа поля по кривой γ равна потоку ротора поля через поверхность S :

$$(2) \quad w(v, \gamma) = F(S, \operatorname{rot} v).$$

Отметим, что формула Гаусса-Остроградского верна в любой размерности, а формула Стокса для потока – только в \mathbb{R}^3 .

Отметим также, что нигде выше не давалось определение потока векторного поля через замкнутую кривую. Немудрено! Это понятие можно корректно определить не для всех векторных полей, а только для бездивергентных. Действительно, поток поля через пленку, затягивающую данную кривую, не зависит от пленки, только если интеграл от дивергенции поля по объему между двумя такими пленками равен нулю.

Из координатных определений легко следует (докажите!), что

$$(3) \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0,$$

$$(4) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} = 0.$$

Более сложная формула (докажите!): для бездивергентных векторных полей

$$(5) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} v = -\Delta v$$

Оператор Лапласа применяется к векторному полю покомпонентно.

Современные доказательства основных формул векторного анализа даются на языке дифференциальных форм.

4 Форма работы и форма потока.

Определение 6 С каждым векторным полем v в евклидовом пространстве связана 1-форма, называемая формой работы:

$$\omega_v(x, \xi) = (v(x), \xi)$$

Задача 1 Интеграл формы работы по кривой равен работе соответствующего поля вдоль кривой.

Тем самым, для задания работы векторного поля по кривой нужны не только поле и кривая, но еще и евклидова структура.

Рассмотрим теперь пространство \mathbb{R}^n , в котором не задана евклидова структура, но выделена постоянная n -форма ω^n , называемая формой объема.

Определение 7 Форма потока векторного поля v в пространстве \mathbb{R}^n с выделенной формой объема ω^n , это

$$\varphi_v(x; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \omega^n(v(x), \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

Лемма 1 Поток векторного поля через ориентированную поверхность S – это интеграл по S от соответствующей формы потока.

Докажите!

5 Вывод основных формул векторного анализа из общей формулы Стокса.

Формула Гаусса – Остроградского.

Задача 2 Дифференциал формы потока поля v равен произведению дивергенции поля v на форму объема ω^n :

$$d\varphi_v = (\operatorname{div} v) \omega^n.$$

Формула Гаусса Остроградского (1) следует теперь из общей формулы Стокса:

$$F(v, s) = \int_S \varphi_v = \int_\Omega d\varphi_v = \int_\Omega (\operatorname{div} v) \omega^n = \int_\Omega (\operatorname{div} v) dV_x.$$

Формула Стокса в \mathbb{R}^3 .

Формула (2) следует также из общей формулы Стокса:

$$w(v; \gamma) = \int_\gamma \omega_v = \int_S d\omega_v = \int_S \varphi_{\operatorname{rot} v} = F(\operatorname{rot} v; S).$$

Формулы (3) и (4) следуют теперь из формулы $d^2 = 0$.

Задача 3 Дифференциал формы работы поля v в трехмерном евклидовом пространстве равен форме потока для ротора поля v .

Это утверждение можно принять за определение ротора. Это определение, на мой взгляд, легче запомнить, чем координатное, которое из него легко выводится.

6 Уравнения Максвелла и формула Стокса.

Уравнения Максвелла выводятся из глобальных формулировок законов электромагнетизма с помощью основных теорем векторного анализа.

Начнем с уравнения III. Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. Значит, интеграл дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью, равен нулю. Но поверхность произвольна, значит и объем произведен; n -форма, интеграл которой по любому объему равен нулю, сама равна нулю.

Аналогично выводится уравнение I, справедливое в области, свободной от зарядов.

Перейдем к уравнению II. Интеграл E по замкнутому контуру – это работа поля E по этому контуру (по определению). По формуле Стокса, для любой пленки, натянутой на контур, этот интеграл равен потоку ротора E через эту пленку. Поток магнитного поля B через этот же контур равен, по определению, потоку поля B через выбранную пленку. Этот поток не зависит от выбора пленки, поскольку поле B бездивергентно. В силу глобальной формулировки, поток поля $\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t}$ через выбранную пленку равен нулю. Но пленка произвольна. Если поток поля через любую поверхность равен нулю, значит само поле равно нулю.

Аналогично выводится уравнение IV в области, свободной от токов.

7 Решение уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла производят устрашающее впечатление. Это восемь уравнений на шесть неизвестных функций. Эти функции “сцеплены” друг с другом: в каждое уравнение входит по несколько разных функций.

Однако эти функции удается “расцепить”. Уравнения Максвелла в пустоте сводятся к шести одинаковым уравнениям на шесть компонент полей B и E . В каждое уравнение входит только одна компонента. Мы применим прием, уже использованный на первых шагах комплексного анализа.

Уравнения Коши-Римана и гармоничность голоморфных функций.

Система II, IV уравнений Максвелла немного напоминает систему уравнений Коши-Римана для двух функций u и v на плоскости:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Эти уравнения тоже зацеплены. Чтобы их расцепить, продифференцируем каждое из уравнений так, чтобы в них входила одна и та же производная функции v (с противоположным знаком), а затем сложим результаты:

$$u_{xx} = v_{xy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Получаем

$$(6) \quad \Delta u = 0.$$

Аналогично

$$\Delta v = 0.$$

Уравнение (6) называется уравнением Лапласа. Его исследование составляет одну из центральных глав теории уравнений с частными производными.

Сведение уравнений Максвелла к волновому уравнению.

Проделаем аналогичную операцию с уравнениями Максвелла.

Возьмем ротор от обеих частей уравнения II и продифференцируем уравнение IV по времени:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E &= -\operatorname{rot} \frac{\partial B}{\partial t} \\ c^2 \frac{\partial \operatorname{rot} B}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \end{aligned}$$

По формуле (5), квадрат ротора бездивергентного поля – это минус лапласиан этого поля:

$$\operatorname{rot} E = -\Delta E.$$

В силу равенства смешанных производных, члены, содержащие B в обоих уравнениях, пропорциональны. Умножим первое уравнение на c^2 и сложим со вторым. Получим:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E.$$

Это уравнение распадается на три скалярных уравнения для компонент поля E . Аналогично получается уравнение

$$(8) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \Delta B.$$

Уравнение на одну компоненту поля B или E (обозначим ее u) имеет вид:

$$(9) \quad u_{t^2} = c^2 \Delta u.$$

Это – *волновое уравнение*, которое во времена Максвелла уже было хорошо изучено. В отличие от ротора, лапласиан определен в евклидовом пространстве любой размерности. Одномерное волновое уравнение описывает колебания струны, двумерное – распространение волн на воде (правда, в очень грубом приближении), трехмерное – распространение звука. Но никто до Максвелла не знал, что оно описывает также распространение электромагнитных колебаний.

8 Совместность уравнений Максвелла.

Исследование волнового уравнения составляет значительную часть традиционного университетского курса уравнений с частными производными. Мы коснемся здесь лишь самых простых свойств этого уравнения.

Волновое уравнение описывает процесс, развивающийся во времени. Можно считать, что функция u в уравнении (9) – это компонента магнитного поля; значение $u(x, t)$ – это величина компоненты в точке x в момент t . Кажется правдоподобным, что для предсказания эволюции процесса достаточно знать его состояние в начальный момент. В уравнениях с частными производными доказывается, что для волнового уравнения это так и есть. Начальное состояние для уравнений Максвелла – это значения $E|_{t=0}$ и $B|_{t=0}$. Для соответствующего волнового уравнения на E – это

$$E|_{t=0} \text{ и } \frac{\partial E}{\partial t}|_{t=0} = c^2 \operatorname{rot} B|_{t=0}.$$

Для общего волнового уравнения это $u_{t=0}$ и $u_t|_{t=0}$. Доказано, что эти данные на всем \mathbb{R}^3 определяют решение в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1$ однозначно. Если начальные данные известны в шаре, то определяется область в пространстве x, t , где решение определено однозначно. Задача: “решить волновое уравнение, зная начальные данные”, называется задачей Коши для волнового уравнения.

Оказывается, что если начальные условия для векторного волнового уравнения (7) или (8) имеют нулевую дивергенцию по x, y, z , то решения имеют нулевую дивергенцию при всех t . Таким образом, уравнения Максвелла I и III при любых t оказываются следствием уравнений II, IV плюс уравнения I и III на плоскости $t = 0$. Это объясняет загадку того, как восемь уравнений на шесть функций оказываются всегда совместными.

9 Бегущие волны.

Описание общего решения волнового уравнения в трехмерном пространстве хорошо известно, но требует определенных усилий. Мы напишем сейчас частное решение, которое находится совсем легко. Предположим, что начальные данные зависят только от одной переменной x , и постоянны по y и z . Найдем частное решение волнового уравнения (9) с одной пространственной переменной

$$(10) \quad u_{t^2} = c^2 u_{x^2}$$

и продолжим его цилиндрически (постоянными функциями) по y и z .

Частное решение будем искать в виде

$$u(t, x) = f(x - at).$$

Оно соответствует начальным условиям:

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = -af'(x).$$

Графики функции $u(t_j, x)$ при разных возрастающих значениях $t_j = 1, 2, 5, \dots$ показывают, что u представляет собою волну, бегущую вправо со скоростью a .

Подставим теперь $u = f(x - at)$ в волновое уравнение. Получим:

$$a^2 f''(x - at) = c^2 f''(x - at).$$

Отсюда следует, что $a = c$! Решение волнового уравнения может быть бегущей волной с любой функцией f (нужно только правильно подобрать начальные условия), но скорость распространения может быть только c .

10 Открытие Максвеллом электромагнитной природы света.

Константа c в уравнениях Максвелла была измерена очень точно в экспериментах по электричеству и магнетизму и оказалась равной скорости света, хотя никакого отношения к свету эксперименты не имели.

Анализируя открытые им уравнения, Максвелл понял, что электромагнитное поле представляет собою волны (подчиняется волновому уравнению), и эти волны распространяются со скоростью света. Тогда Максвелл высказал гениальную догадку:

свет – это электромагнитные волны.

До Максвелла, физики не связывали свет с электричеством и магнетизмом.

Так от экспериментальных законов электромагнетизма, путем чисто математического анализа этих законов, Максвелл пришел к одному из величайших открытий физики – открытию электромагнитной природы света.