Интегрирование по многообразиям и векторный анализ.

Интегрировать формы можно не только по сингулярным кубам, но и по многообразиям с краем. Для этого многообразия разбиваются на сингулярные кубы или представляются в виде так называемых цепей, рис. 1.

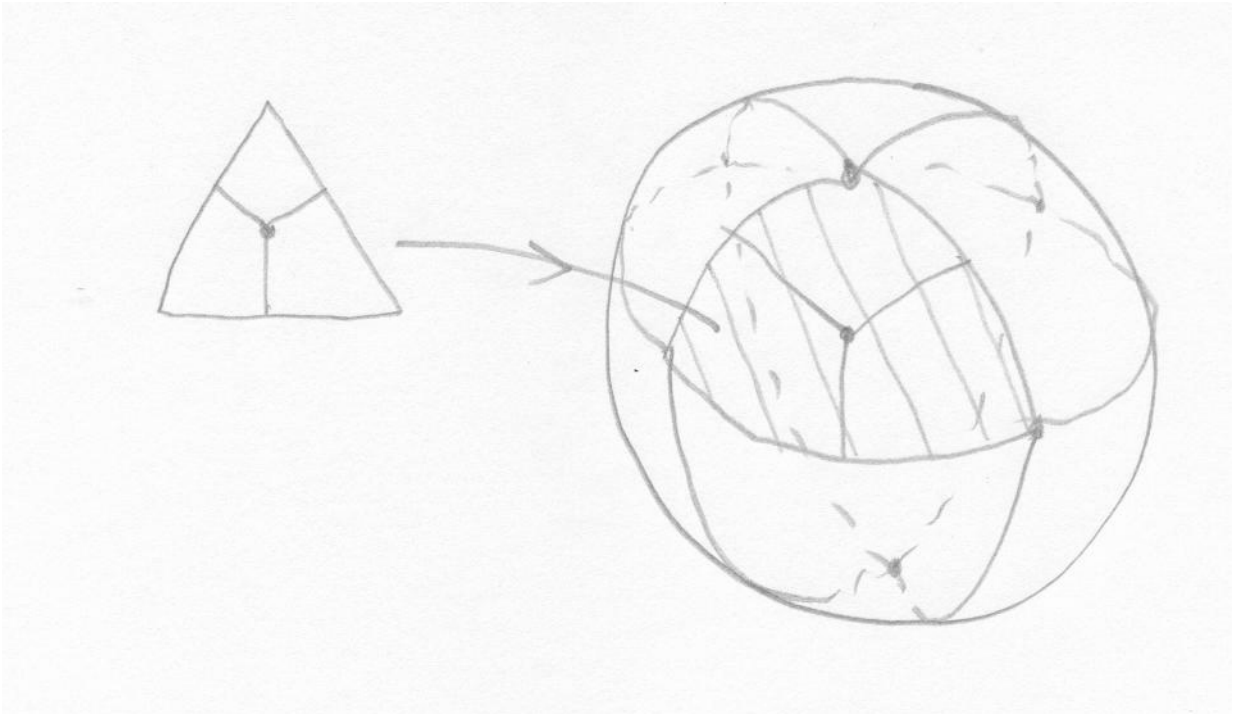

Рис. 1: Разбиение триангулируемой поверхности на сингулярные кубы.

1 Цепи и интегралы по ним.

Пусть M – гладкое многообразие с краем. У нас всегда будет $M \subset \mathbb{R}^N$.

Определение 1 Ориентацией *стандартного k-мерного куба называется выбор одного из классов эквивалентности k-реперов в кубе; два репера называются эквивалентными, если определитель их матрицы перехода положителен. Две ориентации, заданные неэквивалентными реперами, называются противоположными; если одна обозначается Or, то другая Or^-. Через $\mathbf{e}^-$ обозначается репер, ориентированный противоположно реперу $\mathbf{e}$.*

Определение 2 Сингулярный куб – *это тройка (K, f, Or), где K – это стандартный куб, $f : K \to M$ – диффеоморфизм, Or – ориентация стандартного куба.*

Определение 3 Пространство цепей – *это пространство линейных комбинаций сингулярных кубов с целыми (по умолчанию) или вещественными коэффициентами, факторизованное по соотношениям: сумма двух сингулярных кубов, отличающихся только ориентацией, равна нулю; два сингулярных куба с одинаковой ориентацией и образом равны; см. соотношения* (1), (2) *ниже. Одна такая линейная комбинация называется* цепью.

Определение 4 Группа цепей – *это пространство цепей с формальной (покоэффициентной) операцией сложения: если $\mathcal{K}_j$ – сингулярные кубы, и*

$$C_1 = \sum a_j \mathcal{K}_j,\ C_2 = \sum b_j \mathcal{K}_j,$$

то

$$C_1 + C_2 = \sum (a_j + b_j)\mathcal{K}_j.$$

При этом производится факторизация по отношениям эквивалентности.

$$(K, f, Or) + (K, f, Or^-) = 0; \tag{1}$$

$$(K, f, Or) = (K, g, Or) \text{ если } f(K) = g(K). \tag{2}$$

Определение 5 Интералом от k-формы ω *по цепи* $\sum a_j \mathcal{K}_j$ *называется*

$$\sum a_j \int_{\mathcal{K}_j} \omega;$$

интеграл от формы по сингулярному кубу уже определен.

2 Границы цепей.

Рассмотрим k-мерный куб K^k с ребрами $e_1, \ldots, e_k$, образующими ортонормированный репер $\mathbf{e}$, ориентированный этим репером и вложенный в $\mathbb{R}^k$. Грани куба k – это $(k-1)$-мерные кубы K_j и K'_j, ортогональные вектору e_j; первая из них проходит через его начало, вторая – через конец. Они ориентированы таким $(k-1)$-репером $\mathbf{f_j}$, что репер $(e_j, \mathbf{f_j})$ эквивалентен реперу $\mathbf{e}$. Репер с ориентацией, противоположной ориентации репера $\mathbf{f}$, как и выше, обозначается $-\mathbf{f}$ или $\mathbf{f}^-$.

Задача 1 *В качестве* $\mathbf{f_j}$ *для* Γ'_j *можно взять* $(-1)^{j-1}\mathbf{e(j)}$, *где* $\mathbf{e(j)} = \mathbf{e_1}, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j}, \ldots, \mathbf{e_k}$, *а для* Γ_j *– репер* $(-1)^j\mathbf{e(j)}$.

Так определенная ориентация граней называется *правильной* и обозначается Or_j для Γ_j и Or'_j для Γ_j.

Для стандартного куба, ориентированного противоположным репером, ориентации граней противоположны.

Теорема 1 *Граница границы куба равна нулю.*

Доказательство Граница границы куба – это сумма его ориентированных $(k-2)$-мерных граней с коэффициентами ± 1. Каждая $(k-2)$-мерная грань принадлежит ровно двум $(k-1)$-мерным. Правильные ориентации этих $(k-1)$-мерных граней индуцируют противоположные ориентации $(k-2)$-мерной грани. (Проверьте!) Поэтому эта грань входит в границу границы с нулевым коэффициентом. □

Задача 2 *Проверьте утверждение о противоположности ориентаций $(k-2)$-мерной грани из предыдущего доказательства.*

Определение 6 Граница *стандартного куба – это цепь, в которую каждая грань входит с коэффициентом* 1, *и определенной выше ориентацией. Обозначается*

$$\partial K = \Sigma(K_j, id, Or_j) + \Sigma(K'_j, id, Or'_j).$$

Определение 7 Граница *сингулярного куба* (K, f, Or) *– это цепь*

$$\Sigma(K_j, f|_{K_j}, Or_j) + \Sigma(K'_j, f|_{K'_j}, Or'_j).$$

Определение 8 *Определение границы переносится с сингулярных кубов на любые коцепи по линейности:*

$$\partial(\Sigma m_j \mathcal{K}_j) = \Sigma m_j \partial \mathcal{K}_j. \tag{3}$$

3 Представление многообразий цепями и формула Стокса для многообразий с краем

Определение 9 *Замкнутое ориентированное многообразие* представлено цепью, *если все сингулярные кубы не имеют общих внутренних точек и входят в цепь с коэффициентом 1, их ориентация согласована с орентацией многообразия, а их объединение совпадает с многообразием.*

Определение 10 *Ориентированное многообразие с краем* представлено цепью, *если все сингулярные кубы не имеют общих внутренних точек и входят в цепь с коэффициентом 1, их ориентация согласована с орентацией многообразия, их объединение совпадает с многообразием, а граница цепи представляет границу многообразия в смысле предыдущего определения.*

Определение 11 Интеграл от k-формы по k-мерному многообразию с краем – *это интеграл от этой формы по представляющей многообразие цепи.*

Такой интеграл не зависит от представления многообразия цепью. Это утверждение аналогично тому, что интеграл по области, вычисленный как сумма интегралов по частям, на которые эта область разбита, не зависит от разбиения, и мы не будем его доказывать подробно. Рассматривая многообразие, мы будем сразу считать, что оно представлено цепью.

Теорема 2 Формула Стокса для многообразий с краем. *Пусть M – k-мерное ориентированное многообразие с правильно ориентированным краем ∂M, $\omega = \omega^{k-1}$ – $(k-1)$-форма на M. Тогда*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega. \tag{4}$$

Доказательство По определению, интеграл от формы по многообразию равен интегралу от этой формы по предсталяющей его цепи c. Поэтому формула Стокса для многообразий превращается в формулу Стокса для цепей:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \tag{5}$$

Но по линейности, формула Стокса для цепей сводится к формуле Стокса для сингулярных кубов; а для них она уже доказана. Подробнее, если $c = \Sigma m_j \mathcal{K}_j$, то

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\Sigma m_j \partial \mathcal{K}_j} \omega = \Sigma m_j \int_{\partial \mathcal{K}_j} \omega = \Sigma m_j \int_{\mathcal{K}_j} \partial\omega = \int_{\Sigma m_j \mathcal{K}_j} \partial\omega = \int_c \partial\omega.$$

□

4 Напоминание: формы работы и потока векторного поля.

Векторное поле $v : v(x) \in T_x\mathbb{R}^n$, определяет 1-форму работы ω_v и $(n-1)$-форму потока: φ_v. Для определения формы работы нужна евклидова структура $(,)$, для определения формы потока – только форма объема dV. Определения:

$$\omega_v(x;\xi) = (v(x),\xi);$$

$$\varphi_v(x;\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) = dV(x;v(x),\xi_1,\dots,\xi_{n-1}).$$

Координатная запись формы работы в ортонормальном базисе, в котором $v(x) = (v_1,\dots,v_n)(x)$:

$$\omega_v(x;\xi) = \Sigma v_j(x)\xi^j.$$

Запись формы потока в базисе, объем которого равен 1:

$$\varphi_v(x,\cdot) = \sum (-1)^{j-1} v_j(x) dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_j} \wedge \dots dx_n$$

5 Градиент, дивергенция, ротор.

Ниже напоминаются определения: градиент функции и дивергенция: градиент функции и дивергенция векторного поля определены в пространстве любой размерности; ротор – только в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Определение градиента и ротора требует евклидовой структуры; определние дивергенции - только формы объема.

Определение 12 Градиентом *функции f в точке x называется вектор, обозначаемый grad $f(x)$ такой, что*

$$df(x,\xi) = (\mathrm{grad} f(x),\xi).$$

Векторное поле $x \mapsto \mathrm{grad}\ f(x)$ называется *полем градиента* или просто *градиентом* функции f. Сама функция f называется *потенциалом* поля grad f. В ортонормированном базисе

$$\mathrm{grad}\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Определение 13 Дивергенцией поля v *в* $\mathbb{R}^n$ *называется функция* $div\, v$, *определяемая как отношение дифференциала формы потока поля* v *к форме объема:*

$$\operatorname{div} v = \frac{d\varphi_v}{dV}.$$

В базисе объема 1 дивергенция имеет вид:

$$\operatorname{div} v = \sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Определение 14 Ротором *векторного поля* v *в* $\mathbb{R}^3$ *называется векторное поле* $rot\, v$, *форма потока которого равна дифференциалу формы работы поля* V

$$\varphi_{\operatorname{rot} v} = d\omega_v.$$

Определение 15 Ротором *векторного поля* v *в* $\mathbb{R}^2$ *называется функция, равная отношению дифференциала формы работы поля* v *к форме объема:*

$$\operatorname{rot}_2 v = \frac{d\omega_v}{dV}.$$

Задача 3 *Пусть* v_1, v_2 *– функции от* x *и* y, $v = v_1e_1 + v_2e_2$ *– поле в* $\mathbb{R}^2$, $\tilde{v} = v_1e_1 + v_2e_2$ *– поле в* $\mathbb{R}^3$. π *– проекция* $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. *Доказать, что*

$$\operatorname{rot} \tilde{v} = (\operatorname{rot}_2 v \circ \pi)e_3.$$

Координатная запись ротора в ортонормированном базисе для $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $n = 2, 3$:

$$\operatorname{rot}_2 v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = D_1v_2 - D_2v_1;$$

$$\operatorname{rot}\ v = (D_2v_3 - D_3v_2,\ D_3v_1 - D_1v_3,\ D_1v_2 - D_2v_1).$$

Для запоминания полезна следующая формула:

$$\operatorname{rot}\ v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Она напоминает формулу для векторного произведения:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix};$$

эта формула использована ниже. Оператор $\bigtriangledown$, введенный Гамильтоном: $\bigtriangledown = (D_1, D_2, D_3)$ помогает запомнить предыдущие формулы:

$$\operatorname{grad}\ \mathrm{f}\ = \bigtriangledown f$$

$$\operatorname{rot}\ v = \bigtriangledown \times v$$

$$\operatorname{div}\ v = (\bigtriangledown, v).$$

6 Интегралы первого и второго рода.

Как говорилось выше, нельзя интегрировать функции; интегрировать можно только формы. Это не совсем точно. Функции можно интегрировать по любому множеству, на котором задана мера.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство. Как только задана (евклидова) метрика, можно определить площадь (объем) компатного многообразия любой размерности. Площадь – это мера.

Определение 16 Интеграл функции по площади поверхности *(более общо – интеграл функции по мере) называется интегралом первого рода.*

Определение 17 Интеграл (дифференциальной) формы по площади поверхности *называется интегралом второго рода.*

Теорема 3 *Интеграл от формы потока векторного поля по поверхности равен интегралу от скалярного произведения этого поля на единичную внешнюю нормаль, взятому по площади поверхности.*

Доказательство Эта теорема уже доказана на занятиях. □

7 Основные формулы векторного анализа.

Определение 18 Циркуляция векторного поля вдоль контура – *это интеграл формы работы поля по этому контуру.*

Теорема 4 Формула Грина в $\mathbb{R}^2$. *Циркуляция векторного поля по правильно ориентированной границе ориентированной плоской области – это интеграл ротора поля по этой области.*

Ниже предположения об ориентации выполнены по умолчанию.

Теорема 5 Теорема Гаусса–Остроградского в $\mathbb{R}^n$. *Поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивергенуции поля по этой области.*

Теорема 6 Формула Стокса. *Циркуляция векторного поля по замкнутой кривой в $\mathbb{R}^3$ равна потоку поля через ограниченную этой кривой поверхность.*

Все эти теоремы являются следствием предыдущих определений и формулы Стокса. К этому нужно добавить совпадение двух определений потока поля через поверхность (теорема 3).

Примечание. В теоретической контрольной эти (тривиальные) выводы должны быть написаны подробно.