# Формула Стокса и лемма Пуанкаре.

## 1 Формула Стокса для стандартного куба.

Общая формула Стокса для многообразия $\Omega$ с краем $\partial\Omega$ и для любого многогранника $\Omega$ с границей $\partial\Omega$ имеет вид:

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega.$$

Нам еще предстоит определить в общем виде интегралы в обеих частях этого равенства. Пока они определены для случая, когда $\Omega$ – стандартный или сингулярный куб. В этом случае его граница сама состоит из стандартных или сингулярных кубов, так что интеграл $\omega$ по ней от формы определен. Начнем со стандартного куба.

Пусть $K\subset\mathbb{R}^{k+1}$ – куб

$$K=\left\{\sum_{j=1}^{k+1}x_je_j|x_j\in[0,1]\right\},$$

$e_1,\dots,e_{k+1}$ – базисные орты. Продолжим набор $e_1,\dots,e_{k+1}$ постоянными векторными полями. Тогда для любой функции $F$, $L_{e_j}f=\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Обозначим, как и на прошлой лекции, через $\Gamma_j$ и $\Gamma'_j$ грани куба $K$, перпендикулярные вектору $e_j$ и проходящие через начало и конец орта $e_j$ соответственно. Ориентируем их поливектором

$$e(j)=e_1\wedge\dots\wedge\hat{e}_j\wedge\dots\wedge e_{k+1}.$$

Тогда

$$\partial K=\sum_j(-1)^{j-1}(\Gamma'_j-\Gamma_j).$$

Положим:

$$dx(j)=dx_{\mathbf{k+1}\setminus\{\mathbf{j}\}}=dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\dots dx_{k+1}.$$

Строго говоря, последнее выражение нуждается в комментарии, если $j=1$ или $j=k+1$. Выражение $dx_{\mathbf{k+1}\setminus\{\mathbf{j}\}}$ в комментариях не нуждается. Форма $\omega^k$ имеет вид

$$\omega^k=\sum_{j=1}^{k+1}a_j(x)dx(j):=\sum_{j=1}^{k+1}\omega_j.$$

Отметим, что на всех гранях, кроме $\Gamma_j,\Gamma'_j$ форма $\omega_j$ обращается в 0. Поэтому

$$\int_{\partial K}\omega^k=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\left(\int_{\Gamma'_j}\omega-\int_{\Gamma_j}\omega\right)=\int_{\Gamma_j}\omega(x+e_j)-\omega(x).$$

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\omega(x+e_j)-\omega(x)=\int_0^1L_{e_j}\omega(x+te_j)dt$$

Поэтому

$$\int_{\partial K}\omega^k=\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\int_KL_{e_j}\omega(x+te_j;e(j))=\int_Kd\omega(x;e_1,\dots,e_{k+1})dx_1\dots dx_{k+1}=\int_Kd\omega.$$

Это заканчивает доказательство формулы Стокса для стандартного куба.

## 2 Формула Стокса для сингулярного куба.

Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ – сингулярный $(k+1)$-куб в $\mathbb{R}^n$, и пусть $h : K \to \mathcal{K}$ – диффеоморфизм, переводящий стандартный куб в сингулярный. Предположим, что $h$ продолжается как диффеоморфизм в окрестность куба $K$.

Граница куба $\mathcal{K}$ состоит из граней которые, в свою очередь, являются сингулярными кубами. Поэтому

$$\int_{\partial K} h^*\omega = \int_{\partial \mathcal{K}} \omega.$$

Кроме того, по определению,

$$\int_K h^*(d\omega) = \int_{\mathcal{K}} d\omega.$$

По формуле Стокса для стандартного куба,

$$\int_{\partial K} h^*\omega = \int_K dh^*\omega.$$

Чтобы доказать формулу Стокса для сингулярного куба:

$$\int_{\partial \mathcal{K}} \omega = \int_{\mathcal{K}} d\omega$$

осталось доказать, что

$$dh^*\omega = h^*(d\omega). \tag{1}$$

Достаточно проверить совпадение значений правой и левой частей на наборе $e_1, \dots, e_{k+1}$. По определению:

$$h^*(d\omega)(x; e_1, \dots, e_{k+1}) = d\omega(h(x); h_*(x)e_1, \dots, h_*(x)e_{k+1}).$$

Пусть $y = h(x)$, $\xi_j(y) = (h_*(x)e_j)(h^{-1}(y))$. Поля $\xi_j$ являются постоянными на $\mathcal{K}$ в карте $h^{-1}$ и легко продолжаются до постоянных полей в полной $n$-мерной окрестности любой точки из $\mathcal{K}$. Поэтому при $y \in \mathcal{K}$

$$d\omega(y; \xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_j (-1)^{j-1} L_{\xi_j}\omega(y; \xi(j)(y)).$$

Положим

$$f(y) = \omega(y; \xi(j)y), \ g(x) = (h^*\omega)(x; e(j)).$$

Тогда

$$g(x) = f(h(x)).$$

Окончательно,

$$L_{h_*e_j} g(x) = df \circ h(x) L_{e_j} h = df \circ h(x)\xi_j = (L_{\xi_j} f) \circ h$$

Следовательно,

$$L_{\xi_j}\omega(y; \xi(j)y) = L_{e_j}(h^*\omega)(x; e(j)).$$

Это доказывает (1).

Тем самым, формула Стокса для сингулярного куба доказана. Ее доказательство для произвольного компактного многообразия с краем содержится в следующей лекции.

## 3 Лемма Пуанкаре.

**Теорема 1** *Замкнутая форма в выпуклой области точна.*

**Доказательство** Пусть $\omega$ – $k+1$-форма в выпуклой области $U$, $d\omega = 0$. Мы хотим найти $k$-форму $\alpha$ так, что

$$d\alpha = \omega. \tag{2}$$

Для нахождения формы $\alpha$ применим *коническую конструкцию.* Рассмотрим сначала случай $k = 1$. В этом случае для каждого $(x, \xi)$, $\xi \in T_xU$, нужно задать значение $\alpha(x; \xi)$. Фиксируем точку $0 \in U$ и положим:

$$\alpha(x; \xi) = \int_0^1 \omega(tx; x, t\xi)dt \tag{3}$$

Здесь мы отождествляем касательное пространство $T_xU$ с пространством $\mathbb{R}^n$ и рассматриваем радиус-вектор $x$, приложенный в точке $x$, см. рис. 1.

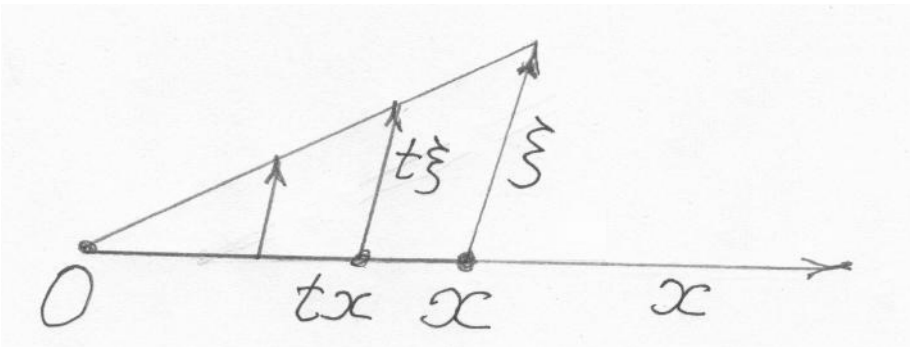


Рис. 1: Коническая конструкция при $k = 1$

Для любого ориентированного многообразия (или любой цепи) с краем $M$, расположенного в плоскости П, не проходящей через 0, обозначим через $KM$ конус над $M$, ориентированный базисом $(-x, e)$, где $e$ – базис, ориентирующий $T_xM$, см. рис. 2.

**Лемма 1** *Для любого ориентированного отрезка $\sigma = [x, y]$,*

$$\int_\sigma \alpha = \int_{K\sigma} \omega \tag{4}$$

Мы докажем эту лемму ниже, а сейчас закончим доказательство леммы Пуанкаре для 2-форм.

**Лемма 2 (Основная лемма)** *Пусть форма $\omega$ замкнута, и $\alpha$ – 1-форма, заданная формулой* (3)*. Тогда выполняется соотношение* (2)*.*

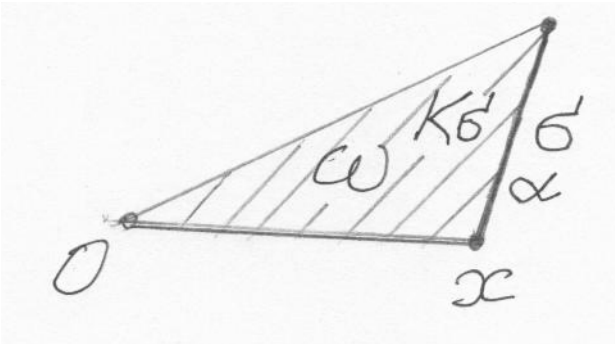


Рис. 2: Конус над ориентированным отрезком

**Доказательство** Рассмотрим произвольный параллелограмм $\Pi$ в двумерной плоскости $P$, не проходящей через 0, и пусть $K\Pi$ и $K\partial\Pi$ – конусы над $\Pi$ и $\partial\Pi$; $K\partial\Pi$ – боковая поверхность конуса $K\Pi$, $\Pi$ – его основание, см. рис. 3.

По лемме 1, примененной поочередно ко всем ребрам ломаной $\partial\Pi$, получаем:

$$\int_{K\partial\Pi}\omega=\int_{\Pi}\alpha.$$

Теперь вступает в силу замкнутость $\omega$, из которой следует ключевое соотношение

$$\int_{\Pi}\omega=\int_{\partial\Pi}\alpha. \tag{5}$$

Действительно, по формуле Стокса, примененной к замкнутой форме $\omega$,

$$\int_{K\partial\Pi}\omega-\int_{\Pi}\omega=\int_{\partial K\Pi}\omega=\int_{K\Pi}d\omega=0.$$

Отсюда следует (5). По формуле Стокса, интеграл от формы $\omega$ по параллелограмму $\Pi$ совпадает с интегралом от $d\alpha$ по тому же параллелограмму. Но поскольку параллелограмм $\Pi$ произвольный, отсюда следует, что $\omega=d\alpha$. $\square$

Осталось доказать лемму 1.

**Доказательство** Рассмотрим квадрат $K^2=[0,1]^2=\{(t,\tau)|t\in[0,1],\ \tau\in[0,1]\}$, отображение $\gamma:[0,1]\to\sigma,\ \gamma(0)=x,\ \gamma(1)=y$ и отображение

$$h:K^2\to K\sigma,\ (t,\tau)\mapsto(t\gamma(\tau),\gamma(\tau)).$$

Тогда

$$\int_{\sigma}\alpha=\int_0^1\alpha(\gamma(\tau);\dot\gamma(\tau))d\tau; \tag{6}$$

$$\int_{K\sigma}\omega=\int_{K^2}h^*\omega=\int_{K^2}\omega(h(t,\tau);h(t,\tau),t\dot\gamma(\tau))d\tau\wedge dt= \tag{7}$$

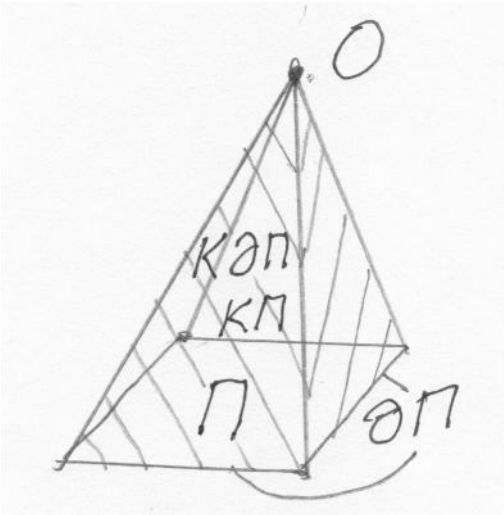


Рис. 3: Конус над параллелограммом

$$= \int_0^1 d\tau \int_0^1 \omega(h(t,\tau); h(t,\tau), t\dot{\gamma}(\tau))dt = \int_0^1 \alpha(h(1,\tau); \dot{\gamma}(\tau))d\tau.$$

Но $h(1,\tau) = \gamma(\tau)$. Следовательно, интегралы (6) и (7) равны. □

Лемма Пуанкаре в случае произвольного $k$ доказывается почти дословно так же. Доказательство иллюстрируется теми же рисунками.

## 4 Случай произвольного $k$.

Пусть теперь $\omega$ – замкнутая $k+1$-форма. Начнем с конической конструкции. Фиксируем точку $0 \in U$. Для любого набора из $k$ векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k \in T_xU$ положим:

$$a(x, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \int_0^1 \omega(tx; x, t\xi_1, \ldots, t\xi_k)dt$$

**Лемма 3** *Для любого $k$-мерного параллелепипеда $\Pi^k$,*

$$\int_{\Pi^k} \alpha = \int_{K\Pi^k} \omega.$$

Здесь $K\Pi$ – конус над $\Pi$, определнный выше. Лемма 3 доказана ниже; сейчас выведем из нее лемму Пуанкаре. Пусть $\Pi^{k+1}$ – произвольный параллелепипед, порожденный векторами $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}$, приложенными в точке $x$. Из леммы 3 следует:

$$\int_{K\partial\Pi^{k+1}} \omega = \int_{\partial\Pi^{k+1}} \alpha.$$

Как и в двумерном случае,

$$\partial K\Pi^{k+1} = K\partial\Pi^{k+1} - \Pi^{k+1}.$$

По формуле Стокса, примененной к $\omega$,

$$\int_{K\partial\Pi^{k+1}} \omega = \int_{\Pi^{k+1}} \omega.$$

Следовательно,

$$\int_{\Pi^{k+1}} \omega = \int_{\partial\Pi^{k+1}} \alpha.$$

Отсюда, как и выше, следует, что $\omega = d\alpha$.

Нам осталось доказать лемму 3. Пусть $\Pi^k$ – $k$-мерный параллелепипед, порожденный векторами $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}$, приложенными в точке $x$. Положим $K^k = [0,1]^k$. Пусть

$$\gamma : K^k \to \Pi,\ (\tau_1, \ldots, \tau_k) \mapsto x + \sum_j \tau_j \xi_j.$$

Тогда

$$\int_{\Pi^k} \alpha = \int_{K^k} \alpha(\gamma(\tau); \xi_1, \ldots, \xi_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

Определим

$$h : K^{k+1} \to K\Pi^k,\ (t, \tau_1, \ldots, \tau_k) \mapsto (t\gamma(\tau); t\xi_1, \ldots, t\xi_k).$$

Тогда:

$$\int_{K\Pi^K} \omega = \int_{K^{k+1}} h^*\omega = \int_{K^{k+1}} \omega(t\gamma(\tau); t\xi_1, \ldots, t\xi_k) dt d\tau_1 \ldots d\tau_k =$$

$$= \int_{K^k} \left( \int_0^1 \omega(t\gamma(\tau); t\xi_1, \ldots, t\xi_k) dt \right) d\tau_1 \ldots d\tau_k = \int_{K^k} \alpha(\gamma(\tau); \xi_1, \ldots, \xi_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k = \int_{\Pi^k} \alpha.$$

Это доказывает лемму 3, а вместе с ней и всю лемму Пуанкаре.

□