Инвариантность определения дифференциала

1 Определение дифференциала (напоминание)

Рассмотрим форму ω степени k, и набор из $k+1$ векторов $\{\xi_1, \dots, \xi_{k+1}\} \subset T_{x_0}M^n$. Продолжим эти векторы постоянными векторными полями в какой-нибудь системе координат; векторы этих полей, принадлежащие T_xU^n, обозначим $\xi_j(x)$. Значение дифференциала $d\omega$ на наборе $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$ определяется формулой:

$$d\omega(x_0; \xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{\xi_j(0)} \omega(x; \xi_1(x), \dots, \hat{\xi}_j(x) \dots \xi_{k+1}(x))|_{x=0}. \tag{1}$$

Нужно доказать корректность определения (1), то есть независимость результата от выбора системы координат, в которой векторы $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$ продолжаются постоянными полями.

2 Корректность определения дифференциала.

Теорема 1 *Правая часть равенства* (1) *не зависит от системы координат, в которой векторы ξ_j продолжены как постоянные векторные поля.*

Доказательство Рассмотрим две карты x и y в окрестности точки $x = 0$. Пусть выбраны $\xi_1(x), ..., \xi_{k+1}(x) \in T_xU$ – поля, постоянные в карте x и продолжающие набор $\xi_1, ..., \xi_{k+1} \in T_0U$. Пусть $\eta_1(x), ..., \eta_{k+1}(x)$ – поля, продолжающие тот же набор и постоянные в карте y. Сделав линейную замену в карте x, можем считать, что поля $\xi_j(x)$ совпадают с постоянными полями ортов $e_1, ..., e_{k+1}$. Тогда в карте x поля $\eta_j(x)$ имеют вид:

$$\eta_j(x) = e_j + A_j x + o(x). \tag{2}$$

Возникает естественный вопрос: какое ограничение на операторы A_j налагает тот факт, что в некоторой карте поля $\eta_j(x)$ постоянны?

Ответ дает следующее

Предложение 1 *Если поля η_j в некоторой карте постоянны, то для любой пары индексов $i, j \in \{1, \dots, k+1\}$ выполняется*

$$A_j e_i = A_i e_j. \tag{3}$$

Доказательство Линейно независимые векторные поля, постоянные в некоторой системе координат, с помощью линейной замены превращаются в поля координатных ортов. Частные производные любой функции в этой системе координат – это производные Ли вдоль соответствующих векторных полей:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = L_{e_j} f.$$

Теорема о равенстве смешанных производных превращается в соотношение:

$$L_{e_i} \circ L_{e_j} f \equiv L_{e_j} \circ L_{e_i} f.$$

Но это равенство инвариантно относительно выбора координат. В карте x оно имеет вид:

$$L_{\eta_i} \circ L_{\eta_j} f \equiv L_{\eta_j} \circ L_{\eta_i} f. \tag{4}$$

Выражая поля η_j по формуле (2), получаем (3) $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Нам нужно проверить, что при замене полей $\xi_j(x)$ полями $\eta_j(x)$ вида (2), правая часть (1) не меняется.

Рассмотрим многообразия M и N, которые представляют собой плоскости, натянутые на постоянные поля ξ и η в координатах x и y соответственно. Это – два $(k+1)$-мерных многообразия, касающихся в точке 0. В карте x многообразие M – плоскость, а поля ξ_j совпадают с полями ортов: $\xi_j \equiv e_j$.

Положим: $\omega^* = \pi^*(\omega|_N)$. Нам нужно доказать равенство:

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{\xi_j} \omega(x; \xi_1(x), \ldots, \hat{\xi}_j(x), \ldots, \xi_{k+1}(x))$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{\eta_j} \omega(x; \eta_1(x), \ldots, \hat{\eta}_j(x), \ldots, \eta_{k+1}(x)). \tag{5}$$

Ввиду инвариантности обеих частей относительно диффеоморфизма, правая часть (5) равна

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{\pi_* \eta_j} \omega^*(x; \pi_* \eta_1(x), \ldots, \pi_* \eta_j(x), \ldots, \pi_* \eta_{k+1}(x)). \tag{6}$$

Поскольку многообразия M и N касаются, формы ω и ω^* отличаются на $O(x^2)$; поэтому при дифференцировании в нуле форму ω^* можно заменить на ω.

Поля $\pi_* \eta_j$ имеют вид:

$$\pi_* \eta_j(x) = e_j + A_j x + O(x^2).$$

Заметим, что последнее слагаемое дает нулевой вклад в правую часть (6), и операторы A_j удовлеьворяют условию (3). Поэтому для доказательства (5) достаточно доказать:

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{e_j} \omega(x; e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_{k+1})|_{x=0} =$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} L_{e_j} \omega(x; (e_1 + A_1 x) \wedge \ldots \widehat{(e_j + A_j x)} \wedge \ldots (e_{k+1} + A_{k+1} x))|_{x=0} \tag{7}$$

при условии (3).

Отметим, что $\omega(x, \xi) = \omega(0; \xi) + O(x)$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k+1} L_{e_j} \omega(x; e_1 + A_1 x \wedge \ldots \widehat{e_j + A_j} x \wedge \ldots e_{k+1} + A_{k+1} x)|_{x=0} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{e_j} \omega(x; e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_{k+1})|_{x=0}, \tag{8}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j L_{e_j} \omega(0; e_1 + A_1 x \wedge \ldots \widehat{e_j + A_j} x \wedge \ldots e_{k+1} + A_{k+1} x)|_{x=0}. \tag{9}$$

Заметим, что Σ_1 – это левая часть равенства (5). Наша цель доказать, что $\Sigma_2 = 0$. В силу линейности формы ω правую часть (9) можно разложить в сумму производных от значений формы $\omega(0;\xi)$ на поливекторах с компонентами e_j и $A_i x$. Поливекторы, в которые входят две и более компоненты вида $A_j x$ имеют порядок малости выше линейного, и производная в нуле значения формы на них равна нулю. Поэтому

$$\Sigma_2 = \omega\left(0; \sum_{i,j=1}^{k+1} P_{ij}\right), \tag{10}$$

где P_{ij} – специальный поливектор:

$$P_{ij} = (-1)^j e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge A_i e_j \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_{k+1}$$

при $i < j$, и

$$P_{ij} = (-1)^j e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge A_i e_j \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_{k+1}$$

при $i > j$.

Предложение 2 *Специальные поливекторы P_{ij} удовлетворяют равенству:*

$$P_{ij} = -P_{ji}.$$

Доказательство Предложение 2 следует из (3) и определения поливектора. □

Предложение 2, вместе с (10), влечет: $\sum\limits_{i,j=1}^{k+1} P_{ij} = 0$. Следовательно, $\Sigma_2 = 0$, что и доказываает теорему 1. □