Дифференциальные формы, их интегралы и дифференциалы.

1 Определение.

Определение 1 *Дифференциальная k-форма на области $U \subset \mathbb{R}^n$ – это C^2-отображение*

$$\omega : U \to \Lambda^k T^* U$$

$$x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k T_x^* U.$$

$$(x, \xi) \mapsto \omega(x; \xi),\ \xi \in \Lambda^k (T_x U).$$

Пусть обозначения те же, что и на прошлой лекции. Тогда

$$\omega(x; \cdot) = \sum_{\mathbf{K} \in C_n^k} a_{\mathbf{K}}(x) dx_{\mathbf{K}}.$$

$$dx_{\mathbf{K}} = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k},\ j_l \in \mathbf{K},\ j_l \nearrow$$

Формы, двойственные к $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ это $dx_j : (dx_j(e_l) = \delta_{jl})$.

2 Обратный образ дифференциальной формы.

Если дано отображение областей (или многообразий) $f : U \to V$, то любой функции, заданной на образе, соответствует функция, заданная на прообразе и называемая *обратным образом* при отображении f; обозначение f^*. Например,

$$F : V \to \mathbb{R},\ f^* F = F \circ f : U \to \mathbb{R}.$$

Аналогично определяется обратный образ функций на касательном расслоении или его внешней степени. Для дифференциальной формы обратный образ определяется так:

$$f^* \omega^k(x; \xi_1, \ldots, \xi_k) = \omega^k(f(x); f_* \xi_1, \ldots, f_* \xi_k).$$

Пример 1 *Пусть U и V – две области с координатами x, y и формами объема $\omega = \mathbf{dy_n}$ и $\alpha = \mathbf{dx_n}$. Пусть $f : U \to V$ – диффеоморфизм. Тогда*

$$f^* \omega = \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \alpha.$$

Задача 1 *Докажите!*

Пример 2 *Пусть $V \subset \mathbb{R}^n,\ y \in V,\ \omega^k(y) = \sum\limits_{\mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}} a_{\mathbf{K}}(y) dy_{\mathbf{K}}$. Тогда*

$$(f^* \omega)^k(x) = \sum a_{\mathbf{K}}(f(x)) df_{\mathbf{K}},$$

где $df_{\mathbf{K}} = df_{j_1} \wedge \cdots \wedge df_{j_k},\ \{j_1, \ldots, j_k\} = \mathbf{K},\ j_l \nearrow$.

Задача 2 *Докажите!*

Теорема 1 *Пусть $f : U \to V,\ g : V \to W \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизмы. Тогда для любого k, отображения k-форм удовлетворяют равенству:*

$$g^* \circ f^* = (g \circ f)^*.$$

Доказательство Следует из формулы для прямого отображения векторов:

$$g_*(f_* \xi) = (g \circ f)_* \xi.$$

Докажите ее! □

3 Эвристическое определение интеграла.

Когда в области U определена k-форма и задано ориентированное k-многообразие с краем или без – сразу возникает интеграл.

a. Случай $k = 1$. Пусть γ – кривая, $P = \{x_1, \ldots, x_N\}$ – ее разбиение, см. рис 1.

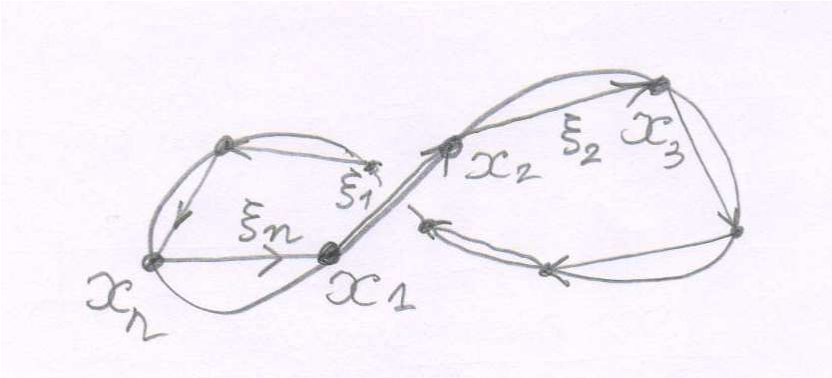

Рис. 1: Интегральная сумма для 1-формы на кривой

Возникает интегральная сумма

$$\Sigma_P = \sum_1^N \omega(x_j; \xi_j),\ \xi_j = x_{j+1} - x_j,\ x_{N+1} := x_1.$$

Предел подинтегральных сумм - интеграл.

b. Случай произвольного $k : \omega = \omega^k$.

Поверхность – прямое произведение кривых естественно интерпретировать как гладкий образ куба (сингулярный куб). Разбиение P поверхности получается как образ естественного разбиение куба. Следующая формула проиллюстрирована на рис. 2.

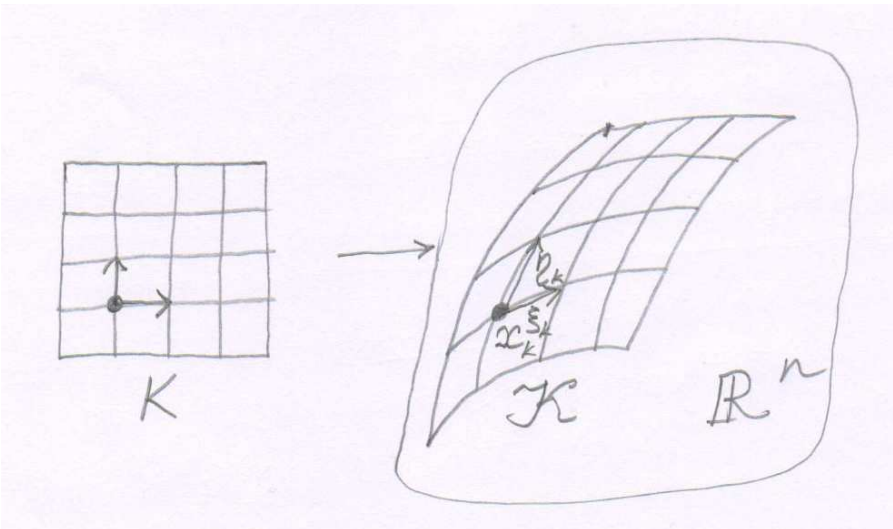

Рис. 2: Интегральная сумма для 2-формы на поверхности

$$\Sigma_P = \sum_1^N \omega_{x_j}(\xi_{j,1} \wedge \cdots \wedge \xi_{j,k})$$

Предел интегральных сумм – интеграл.

Доводить эту картину до точного определения долго. Поэтому интеграл по сингулярному кубу определяют с использованием координат, а потом доказывают независимость от координат.

4 Интеграл по сингулярному кубу.

Дана форма ω^k в U и диффеоморфизм

$$h : K \to h(K) = \mathcal{K} \subset U.$$

($K = [0,1]^k$ – k-мерный куб). Рассмотрим $h^*\omega^k \in \Omega^k(K)$.

Определение 2 *Пусть ω^k – k-форма на K с заданными на K координатами $x_1, \dots, x_k$. Тогда*

$$\omega^k = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

По определению

$$\int_K \omega^k = \int a(x)dx_1 \dots dx_k = \int a(x)dx$$

$\int a(x)dx_1 \dots dx_k$ – интеграл Римана.

Определение 3 $\int_{\mathcal{K}} \omega^k = \int_K h^*\omega^k$.

В дальнейшем интеграл по поверхности будет определен с помощью разбиения поверхности на сингулярные кубы.

5 Корректность.

Нужно проверить, что $\int_{h(K)} \omega^k$ зависит только от $h(K)$ (поверхности интегрирования), а не от отображения h, которое играет роль параметризации поверхности $h(K)$. Два отображения h_1 и h_2 с одинаковым образом: $h_1(K) = h_2(K)$ отличаются диффеоморфизмом куба

$$h = h_2^{-1} \circ h_1.$$

В силу теоремы 1 достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 2 (корректность) *. Для любой формы ω^k на k-мерном кубе K и любого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $h : K \to K$ справедливо равенство*

$$\int_K \omega = \int_K h^*\omega.$$

Доказательство Формула замены переменной для $h : x \mapsto y = h(x)$ имеет вид:

$$\int_K \omega = \int a(y)dy = \int a(h(x))dh(x) = \int a(h(x))\det\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx.$$

Далее, $\omega = a(y)dy_{\mathbf{K}}$

$$h^*\omega = a(h(x))\det\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx_{\mathbf{K}}.$$

Итак, $\int_K \omega = \int_K h^*\omega$. $\square$

Второе фундаментальное понятие теории дифференциальных форм, наряду с интегралом, это понятие дифференциала формы. В учебной литературе есть несколько определений дифференциала внешне непохожих друг на друга. Все они требуют нетривиального доказательства корректности.

6 Определение дифференциала (по Арнольду).

Определение 4 *Пусть ω^k – k-форма в $U = U^n$. Дифференциал $d\omega$ – это $(k+1)$-форма, такая, что для любого $(k+1)$-мерного параллелепипеда $\Pi_\varepsilon^{k+1} = \Pi_\varepsilon \subset T_xU$, порожденного векторами $\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1}$*

$$d\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega}{\varepsilon^{k+1} vol(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})}. \tag{1}$$

Это определение хорошо приспособлено к доказательству формулы Стокса:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega.$$

Чтобы обосновать корректность определения, нужно доказать существование предела в правой части равенства (1) и независимость левой части от системы координат, в которой определен параллелепипед.

Определение 5 *[координатное]*

$$d(adx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = da \wedge dx_{j_1} \dots \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

На остальные формы определение продолжается по линейности. Нужно снова доказывать независимость от системы координат. Определение Арнольда выглядит гораздо более мотивированным, чем координатное.

7 Примеры: явные формулы для вычисления дифференциала.

Рассуждения этого пункта – эвристические. Приближенные равенства означают совпадение с точностью $o(\varepsilon^{k+1})$. Мы не обосновываем оценку погрешности. Наша цель – сформулировать определение дифференциала, подсказанное определением Арнольда так, чтобы новое определение содержало выражения, существование которых не нуждаются в доказательстве.

a. 1-формы на плоскости.

Рассмотрим 1-форму на плоскости и вычислим значение ее дифференциала на паре векторов. Координаты можно взять так, что данные векторы будут ортами; пусть в этих координатах форма имеет вид:

$$\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

Рассмотрим квадрат

$$K_\varepsilon = \varepsilon K,\ K = \{xe_1 + ye_2 |\ x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$$

Правильно ориентированная граница квадрата K имеет вид:

$$\partial K = \Gamma_2 + \Gamma_1' - \Gamma_2' - \Gamma_1.$$

Здесь Γ_j – это сторона, проходящая через 0, перпендикулярная вектору e_j и ориентированная вектором e_i, $i \neq j$, Γ_j' – параллельная ей сторона, см.рис. 3. Отсюда

$$\partial K_\varepsilon = \varepsilon(\Gamma_2 + \Gamma_1' - \Gamma_2' - \Gamma_1),$$

где умножение на ε- гомотетия с центром 0. Имеем:

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \int_{\varepsilon\Gamma_2} \omega + \int_{\varepsilon\Gamma_1'} \omega - \int_{\varepsilon\Gamma_2'} \omega - \int_{\varepsilon\Gamma_1} \omega = \int_{\varepsilon\Gamma_2} \omega(x,0) - \omega(x,\varepsilon e_2) + \int_{\varepsilon\Gamma_1'} \omega(\varepsilon e_1, y) - \omega(0,y) =$$

$$= \varepsilon \int_0^1 \omega(\varepsilon t, 0; e_1) - \omega(\varepsilon t, \varepsilon e_2; e_1) + \varepsilon \int_0^1 \omega(\varepsilon e_1, \varepsilon t; e_2) - \omega(0, \varepsilon t; e_2).$$

Но при $t \in [0,1]$,

$$\omega(\varepsilon t, \varepsilon e_2; e_1) - \omega(\varepsilon t, 0; e_1) = \varepsilon L_{e_2}\omega(x; e_1)|_{x=(\varepsilon t, 0)} + o(\varepsilon),$$

$$\omega(\varepsilon e_1, \varepsilon t; e_2) - \omega(0, \varepsilon t; e_2) = \varepsilon L_{e_1}\omega(x; e_2)|_{x=(0, \varepsilon t)} + o(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \omega \approx \varepsilon^2 [L_{e_2}\omega(x,y;e_1) - L_{e_1}\omega(x,y;e_2)]$$

Следовательно,

$$d\omega(0; e_1, e_2) = \big(L_{e_2}\omega(x; e_1) - L_{e_1}\omega(x; e_2)\big)|_{x=0}. \tag{2}$$

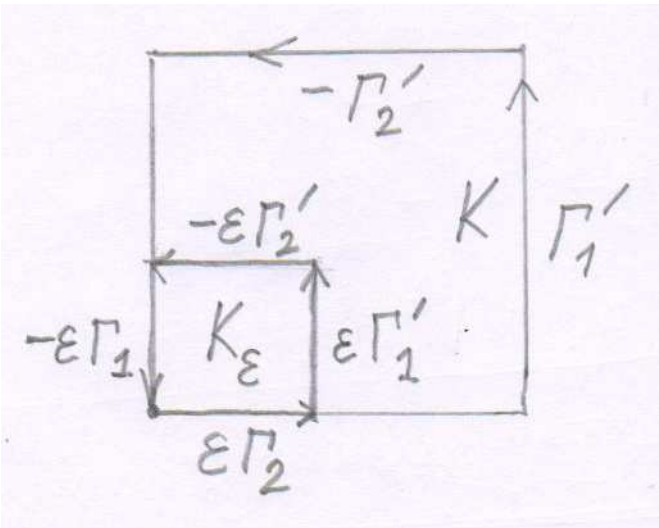

Рис. 3: Квадрат K_ε и его граница

b. 1-формы в пространстве.

Чтобы вычислить значение дифференциала 1-формы на паре векторв, проведем через эту пару векторов плоскость, ограничим форму на эту плоскость, а векторы будем считать

базисными. Тогда значение дифференциала на соответствующем бивекторе снова будет задано формулой (2).

Заметим, что эта формула не использует того, что векторы e_1, e_2 – базисные. Важно только, что в выбранной карте оба поля e_1, e_2 постоянны.

c. Дифференциал k-формы.

Пусть ω – дифференциальная k-форма в области $U \subset \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{k+1}$ – ненулевой $(k+1)$-поливектор в $T_0\mathbb{R}^n$. Фиксируем карту в $(\mathbb{R}^n, 0)$ и в этой карте натянем плоскость Π на векторы $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$. Продолжим эти векторы в Π до постоянных векторных полей и рассмотрим параллелепипед

$$K = \left\{ \sum_1^{k+1} x_j \xi_j | x_j \in [0,1] \right\}.$$

Обозначим через Γ_j и Γ'_j грани K, перпендикулярные вектору ξ_j и проходящие через 0 и конец ξ_j соответственно. Ориентируем эти грани поливектором

$$\xi(j) = \xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_j \wedge \dots \wedge \xi_{k+1}.$$

Тогда правильно ориентированная граница параллелепипеда K имеет вид:

$$\partial K = \sum_j (-1)^{j-1} (\Gamma'_j - \Gamma_j),$$

проверьте! Рассуждая, как в примере a, имеем:

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \sum_j (-1)^{j-1} \int_{\varepsilon(\Gamma'_j - \Gamma_j)} \omega \approx \varepsilon^k \sum_j (-1)^{j-1} [\omega(\varepsilon\xi_j; \xi(j)) - \omega(0; \xi(j))]$$

$$\approx \varepsilon^{k+1} \sum_j (-1)^{j-1} L_{\xi_j} \omega(x; \xi(j))|_{x=0}.$$

Это мотивирует определение дифференциала, сформулированное в следующем разделе.

8 Определение дифференциала, вдохновленное определением Арнольда.

(Это определение, вероятно, можно найти еще у Картана.)

Рассмотрим форму ω степени k, и набор из $k+1$ векторов $\{\xi_1, \dots, \xi_{k+1}\} \subset T_{x_0}M^n$. Продолжим эти векторы постоянными векторными полями в какой-нибудь системе координат; векторы этих полей, принадлежащие T_xU^n, обозначим $\xi_j(x)$. Значение дифференциала $d\omega$ в точке x_0 на наборе $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_{x_0}U^n$ определяется формулой:

$$d\omega(x_0; \xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \sum_j (-1)^j L_{\xi_j(x_0)} \omega(x; \xi_1(x), \dots, \hat{\xi}_j(x) \dots \xi_{k+1}(x))|_{x=x_0}. \tag{3}$$

Нужно доказать корректность определения (3), то есть независимость результата от выбора системы координат, в которой векторы $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$ продолжаются постоянными полями. Это сделано в следующей лекции.