Внешние формы и внешнее умножение.

1 Внешняя форма на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1 Внешняя форма порядка k *или* k-форма ω^k *– это полилинейная кососимметричная (меняет знак при транспозиции) функция на наборах из* k *векторов.*

Пример 1 1*-формы – линейные функционалы. Введём следующую координатную запись* 1*-форм. Пусть* $\mathbf{e} = e_1, \ldots, e_n$ *– базис в* $\mathbb{R}^n$*,* $x_1, \ldots, x_n$ *– соответствующие координаты. Тогда* $dx_1, \ldots, dx_n$ *– двойственный к* $\mathbf{e}$ *базис форм:*

$$dx_j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Пространство 1-форм на $\mathbb{R}^n$ n-мерно.

Пример 2 n*-формы на* $\mathbb{R}^n$ *образуют одномерное пространство.*

Теорема 1 *Пусть* $\mathbf{e} = e_1, \ldots, e_n$ *– базис,* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *– векторы,* Ξ *– матрица,* j*-й столбец которой – координаты вектора* ξ_j *в базисе* $\mathbf{e}$*. Тогда*

$$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\det \Xi)\omega(e_1, \ldots, e_n). \tag{1}$$

Доказательство В силу свойств определителя, форма

$$\omega_0(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det \Xi$$

полилинейна и кососимметрична. С другой стороны, n-форма задается однозначно своим значением на одном наборе векторов. Форма, заданная правой частью (1), имеет вид $C\omega_0$ и, тем самым – внешняя. На наборе $\mathbf{e}$ она принимает значение $\omega(e_1, \ldots, e_n)$ и, тем самым, совпадает с ω. □

2 Поливекторы

Определение 2 Поливекторы *– это классы эквивалентности упорядоченных наборов из* k *векторов пространства* $\mathbb{R}^n$ *относительно следующего отношения эквивалентности.*

a) Все линейно зависимые наборы эквивалентны (нулю).

b) Два линейно независимых набора $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ *и* $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ *эквиваленины, если они порождают одну и ту же* k*-мерную плоскость, и*

$$\det \frac{(\eta_1, \ldots, \eta_k)}{(\xi_1, \ldots, \xi_k)} = 1.$$

Поливектор с представителем $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ обозначается $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k$. Пространство линейных комбинаций поливекторов обозначается $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ и k-й называется внешней степенью простраства $\mathbb{R}^n$.

Поливекторы полилинейны и кососимметричны относительно сомножителей.

Теорема 2 *Внешняя форма есть функция на поливекторах.*

Доказательство Достаточно проверить корректность — совпадение значений на эквивалентных элементов. Для случая a) это следует из косой симметрии, для случая b) ограничиваем форму на плоскость $\mathrm{span}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и применяем теорему 1. □

2.1 Обозначения.

Базисные векторы в пространстве поливекторов $\mathbb{R}^n$ соответствуют подмножествам базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$. Общепринятые обозначения кодируют подмножество с помощью перечисления всех его элементов. Ниже предлагаются более экономные обозначения. Положим:

- $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$;
- $\mathbf{C_n^k}$ – множество всех подмножеств множества $\mathbf{n}$, состоящих из k элементов;
- $\mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}$ – одно такое подмножество;
- $\mathbf{e}$ – базис $e_1, \dots, e_n$;
- пусть $\mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}$, $K = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_l \nearrow$, тогда $\mathbf{e_K}$ – поливектор $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$.

Пример 3 $e_{\mathbf{n}} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ *– n-поливектор.*

Предложение 1 *Если* $\mathbf{e}$ *– базис в* $\mathbb{R}^n$*, то* $\{e_{\mathbf{K}} | \mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}\}$ *– базис в* $\Lambda^k \mathbb{R}^n$*.*

Доказательство Каждый поливектор разлагается в линейную комбинацию базисных. Докажем это индукцией по числу l векторов в поливекторе, не совпадающих с базисным. При $l = 1$ утверждение очевидно.

Шаг от $l-1$ к l. Пусть $\xi_l = \sum_1^n \xi_l^j e_j$. Тогда

$$\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_l \wedge \text{ базисные } = \sum_{j=1}^n \xi_l^j (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{l-1} \wedge \text{ базисные })$$

Правая часть равна линейной комбинации базисных векторов по предположению индукции. □

3 Внешнее произведение 1-форм

Внешнее произведение 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k$ обозначается $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ и определяется следующим образом:

Определение 3 *Внешнее произведение 1-форм – это полилинейное кососимметричное отображение k-й степени пространства 1-форм в пространство k-форм, нормированное условием: если $\omega_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, то*

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) = 1. \tag{2}$$

Теорема 3 *Внешнее произведение 1-форм действует на поливекторах по формуле:*

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) = \det(a_{ij}), \ a_{ij} = \omega_i(\xi_j). \tag{3}$$

Доказательство Обозначим через A матрицу (a_{ij}). Ограничим формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ на плоскость, натянутую на векторы $\xi_1 \dots, \xi_k$; обозначим ограничения через $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Если эти ограничения линейно зависимы, то матрица A вырождена: $\det a_{ij} = 0$. Если они линейно независимы, то существует базис $\beta_1, \dots, \beta_k \in \operatorname{span}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, двойственный к базису $\xi_1, \dots, \xi_k$:

$$\beta_i(\xi_j) = \delta_{ij}.$$

По определению,

$$\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k(\xi_1 \wedge \dots \xi_k) = 1.$$

С другой стороны, формы α_j определяются своими значениями на векторах ξ_i. Поэтому

$$\alpha_i = \sum_j \alpha_i(\xi_j)\beta_j = \sum_j a_{ij}\beta_j.$$

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1, получаем:

$$\alpha_1 \wedge \dots \alpha_k(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) = \det A.$$

Отсюда следует (3). □

4 Координатное представление k-форм

Теорема 4 *Любая k-форма разлагается в линейную комбинацию внешних произведений 1-форм.*

Доказательство Пусть $\mathbf{e}$ – базис $e_1, \dots, e_n$, $\{e_{\mathbf{K}} | \mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}\}$ – соответствующий базис внешней степени $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbf{dx}$ базис, двойственный к $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{dx} = dx_1, \dots, dx_n,\ dx_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Обозначим через $\{dx_{\mathbf{K}} | \mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}\}$ базис, двойственный к $\{e_{\mathbf{K}}\}$:

$$dx_{\mathbf{K}} = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

при $\mathbf{K} = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_l \nearrow$. Тогда

$$dx_{\mathbf{K}}(e_{\mathbf{L}}) = \delta_{\mathbf{KL}} = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathbf{K} = \mathbf{L} \\ 0 \text{ при } \mathbf{K} \neq \mathbf{L} \end{cases}$$

Действительно, если $\mathbf{K} = \mathbf{L}$, то $\omega_{\mathbf{K}}(e_{\mathbf{L}}) = \det E$, где E – единичная матрица порядка k. Если $\mathbf{K} \neq \mathbf{L}$, то при $j \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{K}$, j-й столбец матрицы $(\omega_i(e_j))_{i \in \mathbf{K}, j \in \mathbf{L}}$ будет нулевым.

Тем самым, любая внешняя k-форма есть линейная комбинация форм $dx_{\mathbf{K}}$, $\mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}$:

$$\omega^k = \sum_{\mathbf{K} \in \mathbf{C_n^k}} a_{\mathbf{K}} dx_{\mathbf{K}}.$$

□

5 Внешнее произведение форм

5.1 Два определения внешнего произведения одночленов

Определение 4 *Первое определение.*

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_l) = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_l. \tag{4}$$

правая часть уже определена.

Второе определение.

Пусть ω^k и α^l – одночлены:

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k, \ \alpha_l = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_l.$$

Тогда

$$\omega^k \wedge \alpha^l(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_{k+l}) = \sum_{\substack{\mathbf{K}\cup\mathbf{L}=\mathbf{k+l} \\ \mathbf{K}\in\mathbf{C}^{\mathbf{k}}_{\mathbf{k+l}}}} (-1)^{\nu}(\omega^k)(\xi_{\mathbf{K}}) \cdot \alpha^l(\xi_{\mathbf{L}}), \tag{5}$$

где ν – четность подстановки:

$$\mathbf{k+l} \to (\mathbf{K}, \mathbf{L}).$$

Здесь пара $(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ означает упорядоченное множество, в котором сначала выписаны все элементы множества $\mathbf{K}$ в порядке возрастания номеров, а затем, в аналогичном порядке, элементы множества $\mathbf{L}$.

Теорема 5 *Два определения внешнего произведения совпадают.*

Доказательство Следует из теоремы о разложении определителя по минорам. □

Теорема 6 *Внешнее произведение одночленов ассоциативно.*

Доказательство Следует из первого определения. □

Теорема 7 *Внешнее произведенеи одночленов косокоммутативно: если ω^k и α^l–одночлены, то*

$$\omega^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl}\alpha^l \wedge \omega^k$$

Доказательство Следует из косокоммутативности внешнего произведения 1-форм, которая заложена в определение. □

5.2 Внешнее произведение произвольных форм

Напомним, что всякая внешняя форма есть сумма одночленов.

Определение 5 *Внешнее произведение форм определяется по следующему правилу: внешнее произведение одночленов продолжается по дистрибутивности.*

Теорема 8 *Так определенное внешнее произведение косокоммутативно, ассоциативно и дистрибутивно.*

Доказательство Дистрибутивность заложена в определение. Ассоциативность внешнего умножения одночленов распространяется на внешнее умножение их сумм по дистрибутивности. То же относится к косокоммутативности. □

Недостаток этого определения состоит в том. что результат может зависеть от представления формы в виде суммы одночленов. Мы докажем, однако, что этой зависимости нет. Для этого дадим эквивалентное определение внешнего произведения форм.

Определение 6 *Внешнее произведение k и l-форм ω^k и α^l задается формулой* (5) *для любых k и l-форм (а не только для одночленов).*

Теорема 9 *Два определения внешнего произведения форм эквивалентны.*

Доказательство Докажем, что новое определение совпадает со старым. Действительно, если это совпадение проверено для слагаемых: $\omega^k \wedge \alpha^l$ и $\omega^k \wedge \beta^l$, то оно имеет место и для суммы: $\omega^k \wedge (\alpha^l + \beta^l)$. Поэтому его достаточно проверить для одночленов. Но это уже сделано выше. □