Дифференциальные формы на плоскости.

Даны функция и кривая на плоскости. *Найти интеграл этой функции по кривой.* Такая задача не имеет смысла. Интегрировать функции по кривым (не задав на них дополнительной структуры) нельзя. Интегрировать по кривым можно только 1-формы.

1 1-формы.

Определение 1 *Один-форма в области U на плоскости – это функция на касательном расслоении, линейная по слоям. Более подробно,*

$$\omega : TU \to \mathbb{R},\ (x, \xi) \mapsto \omega(x; \xi),$$

где $x \in U$, $\xi \in T_xU$ – это отображение, гладкое по x и при каждом фиксированном x линейное по ξ.

Замечане 1 *При фиксированном x, 1-форма – это линейный функционал на касательном пространстве T_xU.*

Координатная запись. Если $x = (x_1, x_2)$ – карта на U, то все касательные пространства можно отождествить с помощью сдвига. Через dx_1, dx_2 обозначается карта на любом из их, т.е. координаты в базисе $e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)$ на T_xU. Запись:

$$\omega(x; \xi) = a(x)dx_1 + b(x)dx_2, \tag{1}$$

где $\xi = (dx_1, dx_2)$. Часто вместо x_1, x_2, x пишем $x, y, (x, y)$:

$$\omega(x, y, \xi) = a(x, y)dx + b(x, y)dy, \tag{2}$$

где $\xi = (dx, dy)$.

Пример 1 *Основным примером является диффференциал функции – 1-форма вида*

$$df : (x, y; \xi) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \tag{3}$$

Форма вида (3) называется *полным дифференциалом* или *точной формой.*

Точные формы играют особенно важную роль в анализе.

2 Критерий точности.

Как по форме (1) или (2) узнать, точна она или нет? Другими словами, существует ли функция f такая, что форма имеет вид (3)?

Теорема 1 *Форма (2) с C^2-гладкими коэффициентами точна в односвязной области U на плоскости, если и только если в этой области*

$$\frac{\partial a}{\partial y} \equiv \frac{\partial b}{\partial x}. \tag{4}$$

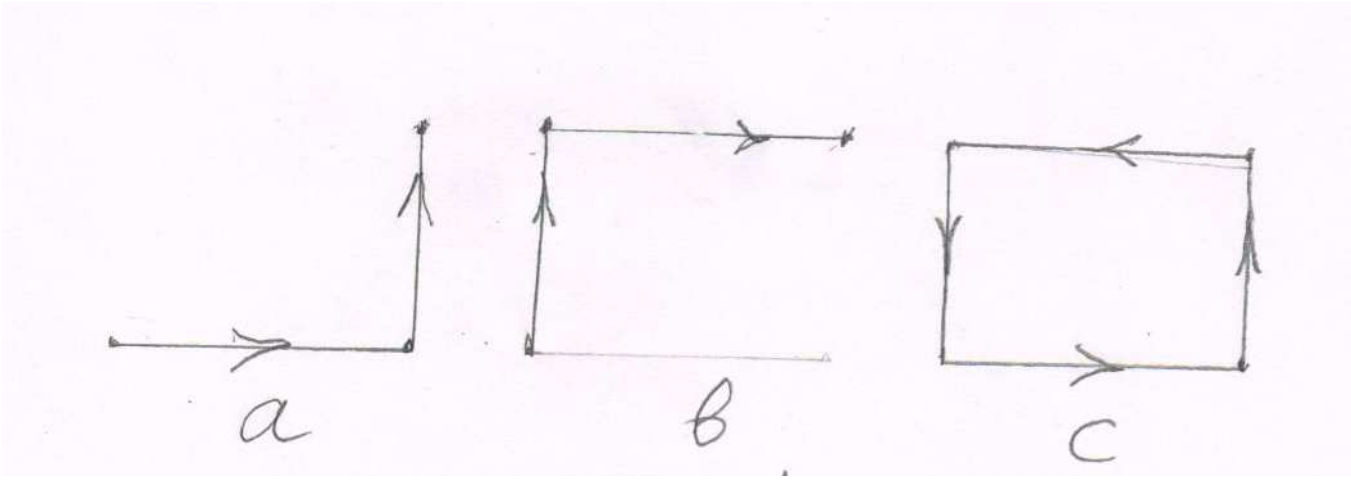

Рис. 1: Пути интегрирования для нахождение потенциала и составленный из них замкнутый контур

Доказательство Необходимость немедленно следует из теоремы о равенстве смешанных производных.

Достаточность докажем сначала для случая, когда область U является прямоугольником. Пусть $a = (x_0, y_0)$ центр этого прямоугольника. Для любого $(x, y) \in U$, положим:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x,t)dt, \tag{5}$$

см. рис. 1a.

Очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y). \tag{6}$$

Но верна также формула

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y). \tag{7}$$

Почему? А потому, что, как доказано ниже,

$$f(x,y) = \int_{y_0}^{y} b(x_0, t)dt + \int_{x_0}^{x} a(t,y)dt, \tag{8}$$

см. рис. 1b.

Формула (7) немедленно следует из (8). Осталось доказать, что два выражения функции f, заданные формулами (5), (8), совпадают. Другими словами, $I_2 - I_1 = 0$, где

$$I_1 = \int_{x_0}^{x} a(t,y)dt - \int_{x_0}^{x} a(t,y_0)dt, \tag{9}$$

$$I_2 = \int_{y_0}^{y} b(x,t)dt - \int_{y_0}^{y} b(x_0,t)dt. \tag{10}$$

Теперь в игру вступает решающее соображение: от интегралов по сторонам прямоугольника мы переходим к интегралу по всему прямоугольнику Π (с вершинами (x_0, y_0) и

(x, y) на диагонали и со сторонами, параллельными осям, см. рис. 1c. А именно, по теореме о равенстве кратного и повторного интегралов

$$I_2 = \int_\Pi \frac{\partial b}{\partial x} dxdy, \ I_1 = \int_\Pi \frac{\partial a}{\partial y} dxdy.$$

В силу равенства (4), $I_1 = I_2$. Это доказывает теорему, когда U – прямоугольник. □

Доказательство теоремы для более общей области дано ниже.

Функция f, дифференциалом которой является форма ω, называется *потенциалом* этой формы.

3 Интегрирование 1-форм

Если в области U заданы 1-форма и непараметризованная ориентированная кривая Γ, сразу возникает интеграл

$$I = \int_\Gamma \omega = \lim_{\text{diam } P \to 0} \Sigma_0^{n-1} \omega(x_j; \xi_j), \tag{11}$$

где $\xi_j = x_{j+1} - x_j$, $P = (x_0, \ldots, x_n)$ – разбиение кривой Γ. Разбиение P – это упорядоченный набор точек $x_j \in \Gamma$, $j = 0, \ldots, n$; точки x_0 и x_n – соответственно, начало и конец кривой Γ; $\text{diam } P = \max |x_{j+1} - x_j|$, см. рис. 2.

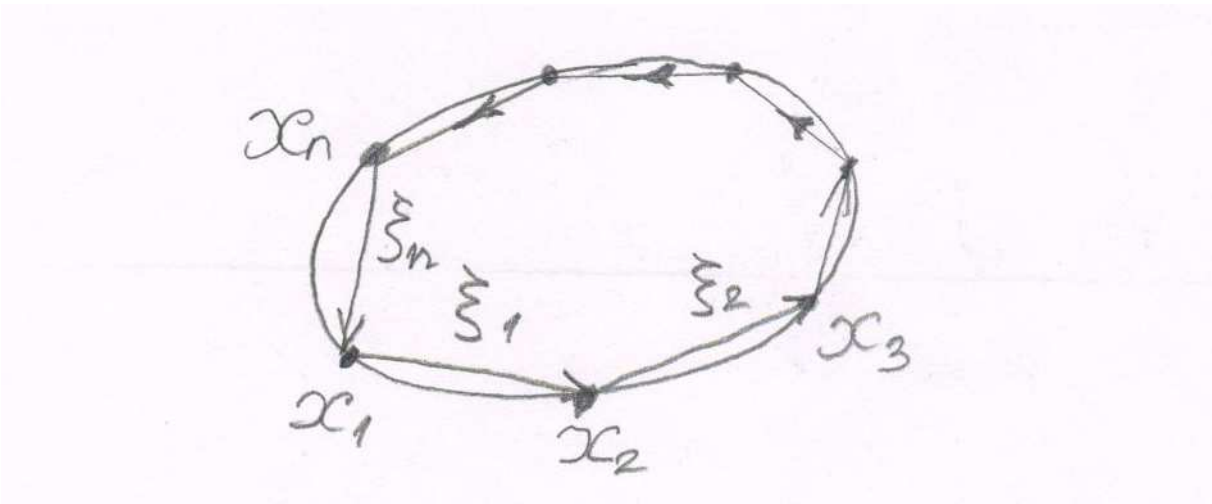

Рис. 2: Интеграл от 1-формы по кривой

Мы не будем доказывать сходимость интегральных сумм (11), оставив формулу (11) в качестве эвристического определения интеграла. Формальное определение звучит так.

Определение 2 *Пусть $\gamma : [0, 1] \to U$ – параметризованная кривая. Тогда*

$$I = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t); \dot{\gamma}(t)) dt. \tag{12}$$

Пусть $(dx, dy)(\dot\gamma(t)) = \dot\gamma_1(t), \dot\gamma_2(t)$. Тогда, записав форму ω в координатах (x, y), см. (2), получаем:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 (a(\gamma(t))\dot\gamma_1(t) + b(\gamma(t))\dot\gamma_2(t))dt.$$

Пусть $\Gamma = \gamma([0,1])$. Нужно доказать, что интеграл (12) зависит только от Γ, а не от параметризации γ. Для этого рассмотрим другую параметризацию $\lambda : [0,1] \to \Gamma$, которая сохраняет ориентацию.

Пусть $\lambda^{-1} \circ \gamma = h : [0,1] \to [0,1]$. Тогда

$$\gamma(t) = \lambda \circ h(t),\ \dot\gamma(t) = \dot\lambda \circ h(t) \cdot \dot h(t).$$

Положим: $h(t) = \tau$, тогда $d\tau = \dot h(t)dt$. По (12), имеем:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \omega(\gamma(t); \dot\gamma(t))dt = \int_0^1 \omega(\lambda \circ h(t); \dot\lambda \circ h(t) \cdot \dot h(t))dt = \int_0^1 \omega(\lambda(\tau); \dot\lambda(\tau))d\tau.$$

Это показывает, что замена отображения γ на λ в интенрале (12) не меняет значения интеграла.

Мы можем доказать теперь критерий точности в любой односвязной области.

Теорема 2 *Пусть форма $\omega = adx + bdy$ задана в односвязной области и в ней удовлетворяет условию $a_y = b_x$. Тогда она точна.*

Доказательство Возьмем базисную точку $p \in U$ и соединим любую точку $q \in U$ с p гладкой кривой γ. Ориентируем ее от p к q и положим:

$$f = \int_\Gamma \omega.$$

Это определение зависит только от конца кривой q, а не от выбора кривой Γ. Действительно, интегралы по двум разным кривым с общим началом и концом равны. Докажем это утверждение. Разность двух кривых с общим началом и концом – это замкнутая кривая, которая стягивается, поскольку область односвязна. Стягиваемость означает, что существует гладкое отображение единичного квадрата $h : K \to U,\ K = \{(t,s)|t \in [0,1],\ s \in [0,1]\}$ такое, что $h|_{s=1} = \gamma$; на остальной части границы квадрата $h \equiv p$. Рассмотрим форму $h^*\omega = \alpha,\ \alpha(u;\eta) = \omega(h(u); h_*\eta)$ Локально $\omega = dF$; тогда

$$\alpha = d(F \circ h)$$

(инвариантность первого дифференциала).

Форма α точна в прямоугольнике. Ее интеграл по границе прямоугольника, с одной стороны, равен $\int_\gamma \omega$ и силу инвариантности интеграла; с другой стороны, он равен нулю, как установлено в доказательстве теоремы 1.

□

4 Интегралы от точных 1-форм

Теорема 3 *Интеграл от точной 1-формы по кривой равен разности значений потенциала в начале и в конце кривой.*

Доказательство Пусть $\omega = df$ в бласти $U, \gamma : [0,1] \to U$ – кривая. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \varphi(t)dt,$$

где

$$\varphi(t) = \omega(\gamma(t); \dot\gamma(t)).$$

Докажем, что

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t). \tag{13}$$

Действительно,

$$\omega(\gamma(t); \dot\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \gamma(t) \cdot \dot\gamma_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \gamma(t) \cdot \dot\gamma_2(t).$$

Отсюда следует (13). По формуле Ньютона-Лейбница,

$$I = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

□

Следствие 1 *Интеграл от точной формы по замкнутому контуру равен нулю.*

5 Голоморфные 1-формы

Теория 1-форм значительно обогащается, если рассматривать не только вещественные, но и комплексно линейные функционалы на касательном пространстве. Комплексной 1-формой на области $U \subset \mathbb{R}^2$ называется отображение

$$\omega : TU \to \mathbb{C},\ (x, \xi) \mapsto \omega(x; \xi),$$

вещественно линейное по $\xi \in T_x U$.

Введем на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ комплексную координату z. Пространство вещественно-линейных комплекснозначных форм на $\mathbb{R}^2$ линейно и двумерно над $\mathbb{C}$. Базис в этом пространстве форм образуют формы dx и dy, а также $dz = dx + idy$ и $d\bar z = dx - idy$. Пространство $T_z\mathbb{C}$ линейно (и одномерно) над $\mathbb{C}$. Форма dz важна тем, что она $\mathbb{C}$-линейна:

$$dz(i\xi) = idz(\xi),$$

(проверьте!), а форма $d\bar z$ антилинейна:

$$d\bar z(i\xi) = -id\bar z(\xi).$$

Напомним

Определение 3 *Функция $f \in C^1(U)$ голоморфна, если ее дифференциал $\mathbb{C}$-линеен. Другими словами, существует комплексная производная*

$$\frac{df}{dz} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Определение 4 *Форма $\omega = f(z)dz$ с голоморфным коэффициентом f называется голоморфной 1-формой.*

Теорема 4 *Голоморфная 1-форма в односвязной области на плоскости $\mathbb{C}$ точна.*

Доказательство Как известно, голоморфная функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ удовлетворяет условиям Коши-Римана. Напомним их.

Пусть $1 \in T_zU$ – вектор с комплексной координатой 1. Тогда

$$df(z;1) = u_x(x,y) + iv_x(x,y),$$

$$df(z;i) = u_y(x,y) + iv_y(x,y) = idf(z;1).$$

Отсюда:

$$u_x = -v_y,\ v_x = u_y.$$

Это и есть условия Коши-Римана. Заметим, что

$$f(z)dz = udx - vdy + i(vdx + udy) = \omega_1 + i\omega_2.$$

Из условий Коши-Римана следует, что обе формы ω_1 и ω_2 в односвязной области точны. □

Следствие 2 (Интегральная теорема Коши) *Интеграл от голоморфной формы $f(z)dz$ по замкнутому контуру, стягиваемому в области определения формы, равен нулю.*

Задача 1 *Пусть дифференциал функции g, заданной на диске, антилинеен:*

$$dg(z;i\xi) = -idg(z,\xi).$$

Будет ли какая-нибудь из форм: $gdz, gd\bar{z}$ точна?

6 Векторный анализ на плоскости.

Определение 5 *Градиент функции – это вектор, скалярное произведение на который равно дифференциалу функции.*

Задача 2 *Значение df на $\xi = (dx, dy) \in T_x\mathbb{R}^2$ равно*

$$df_x(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dy. \tag{14}$$

Следствие 3 *В ортогональной системе координат*

$$(gradf)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right). \tag{15}$$

Осторожно: формула (14) верна в любой системе координат, а формула (15) – только в ортогональной.

С каждым векторным полем v на плоскости связаны две формы: форма работы ω_v и форма потока φ_v:

$$\omega_v(x;\xi) = (v(x), \xi(x)) \tag{16}$$

$$\varphi_v(x;\xi) = \det(v(x), \xi) = dV(v(x), \xi). \tag{17}$$

Обозначения выбраны так, чтобы напоминать слова work и flow.

Задача 3 *Форма работы для градиентного векторного поля точна.*

Определение 6 *Дифференциал 1-формы* $\omega = adx+bdy$ *- это 2-форма* $d\omega = (b_x - a_y)dx \wedge dy$.

Мотивировка этого определения и его независимость от координат обсуждаются в следующей лекции.

Определение 7 *Дивергенция векторного поля – это функция, произведение которой на форму объема равно дифференциалу формы потока поля.*

Задача 4 *Выразить дивергенцию поля через его коэффициенты в симплектическом базисе.*

Определение 8 *Симплектический базис на плоскости – это тот, в котором форма объема имеет вид* $dx \wedge dy$.

Определение 9 *Лапдасиан функции* f *– это дивергенция ее градиента.*

$$\Delta f = div \quad grad\ f.$$

Задача 5 *Выразить лапласиан через частные производные функции в ортогональных координатах.*

Формула Грина: для области Ω с гладкой границей

$$\int_{\partial\omega} \varphi_v = \int_{\omega} \mathrm{div}\ v dV.$$

Задача 6 *Поток градиента функции через границу области равен интегралу по области от лапласиана этой функции.*