

## Вариант 2, Часть 1

Все ответы должны быть обоснованы. Работа должна быть выполнена абсолютно самостоятельно, не прибегая к электронным источникам (пользование конспектами и книгами разрешается). 1 балл = 5 очков. Очки, набранные свыше 50, компенсируют недобор за работу в течение семестра.

- 1. (6)** Найдите работу векторного поля  $(y, 2x)$  по правильно ориентированной границе области:

$$\{(x, y) \mid x \in [0, \pi], y \in [0, \sin^3 x]\}.$$

- 2. (6)** Найдите площадь фигуры на плоскости, ограниченной кривой

$$(t^4 - t^5, t - t^6), \quad t \in [0, 1].$$

- 3. (10)** Точна ли форма  $\omega = \sin^4(x)dx + \sin^3(y)dy$

- a) (4) на торе  $\mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$ ;  
 b) (6) на цилиндре  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}(0, 2\pi)$ ?

- 4. (10)** Пусть  $F = y^x$ ,  $G = xy$ ,  $H = 2x^3 - y^3 + 3xy$ . Положим  $f = F|_{H=0}$ ,  $g = G|_{H=0}$ .

- a) (4) Докажите, что  $g$  является локальной координатой на множестве нулей  $H$  в окрестности точки  $p = (1, 2)$ .

- b) (6) Найдите  $\frac{df}{dg}(p)$ .

- 5. (20)** При каких значениях комплексных  $a, b \in \mathbb{C}$  отображение

$$f_{a,b}: z \mapsto (az + b)^2$$

- a) (2) является локальным диффеоморфизмом во всех точках открытого единичного диска;

- b) (6) сохраняет дивергенцию;  
 c) (8) сохраняет направление градиента;  
 d) (4) сохраняет сам градиент?

## Вариант 2, Часть 2

**6. (6)** Найдите потенциал радиальной силы  $v(\mathbf{x}) = e^{-3|\mathbf{x}|+2}\mathbf{x}$  в  $\mathbb{R}^4$ .

**7. (9)** Пусть  $v(\mathbf{x}) = \cos(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$  — векторное поле в  $\mathbb{R}^3$ .

a) (3) Вычислите  $\operatorname{rot} v$ .

b) (6) Может ли  $v$  быть ротором какого-либо векторного поля в  $\mathbb{R}^3$ ?

**8. (8)** Найдите поток градиента функции  $3x_1 + 2x_2 + x_3 + \frac{1}{|\mathbf{x}-e_1|} + \frac{2}{|\mathbf{x}+e_2|} + \frac{3}{|\mathbf{x}-e_3|}$  через эллипсоид  $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 3/2$ .

**9. (10)** Найдите интеграл  $\int_S \omega$ , где

$$\omega = (x + y^3 + z^2)dy \wedge dz + (x^4 z^4)dz \wedge dx + (x^3 + y^3)dx \wedge dy$$

a) (5) по правильно ориентированной границе единичного куба

b) (5) по эллипсоиду

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

**10. (15)** Найдите коразмерность пространства всех точных 1-форм в пространстве замкнутых 1-форм на цилиндре  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  с одной выколотой точкой