Вариант 1, Часть 1

Все ответы должны быть обоснованы. Работа должна быть выполнена абсолютно самостоятельно, не прибегая к электронным источникам (пользование конспектами и книгами разрешается). 1 балл = 5 очков. Очки, набранные свыше 50, компенсируют недобор за работу в течение семестра.

1. (6) Найдите работу векторного поля $(y, -x)$ по правильно ориентированной границе области:

$$\{(x, y) \mid x \in [0, \pi],\ y \in [0, \sin^3 x]\}.$$

2. (6) Найдите площадь фигуры на плоскости, ограниченной кривой

$$(t^3 - t^5, t^2 - t^6), \qquad t \in [0, 1].$$

3. (10) Точна ли форма $\omega = \sin^3(x)dx + \cos^2(y)dy$
a) (4) на торе $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$;
b) (6) на цилиндре $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}(2\pi, 0)$?

4. (10) Пусть $F = x^y$, $G = xy$, $H = 2x^3 + y^3 - 5xy$. Положим $f = F|_{H=0}$, $g = G|_{H=0}$.
a) (4) Докажите, что g является локальной координатой на множестве нулей H в окрестности точки $p = (1, 2)$.
b) (6) Найдите $\frac{df}{dg}(p)$.

5. (20) При каких значениях комплексных $a, b \in \mathbb{C}$ отображение

$$f_{a,b}\ z \mapsto az + bz^2$$

a) (2) является локальным диффеоморфизмом во всех точках открытого единичного диска;
b) (6) сохраняет дивергенцию;
c) (8) сохраняет направление градиента;
d) (4) сохраняет сам градиент?

Вариант 1, Часть 2

6. (6) Найдите потенциал радиальной силы $v(\mathbf{x}) = e^{-2|\mathbf{x}|+3}\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^5$.

7. (9) Пусть $v(\mathbf{x}) = \sin(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$.
a) (3) Вычислите $\operatorname{rot} v$.
b) (6) Может ли v быть ротором какого-либо векторного поля в $\mathbb{R}^3$?

8. (8) Найдите поток градиента функции $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{|\mathbf{x}-e_1|} + \frac{2}{|\mathbf{x}-e_2|} + \frac{3}{|\mathbf{x}+e_3|}$ через эллипсоид $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 5/2$.

9. (10) Найдите интеграл $\int_S \omega$, где

$$\omega = (x + y^2 + z^3)dy \wedge dz + (x^4 + z^4)dz \wedge dx + (x^3y^3)dx \wedge dy$$

a) (5) по правильно ориентированной границе единичного куба
b) (5) по эллипсоиду

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

10. (15) Найдите коразмерность пространства всех точных 1-форм в пространстве замкнутых 1-форм на двумерном торе с одной выколотой точкой