Вариант 1, Часть 1

Все ответы должны быть обоснованы. Работа должна быть выполнена абсолютно самостоятельно, не прибегая к электронным источникам (пользование конспектами и книгами разрешается). 1 балл = 5 очков. Очки, набранные свыше 50, компенсируют недобор за работу в течение семестра.

1 (5). Можно ли представить в виде скалярного произведения (f, g) в $L_2[-2, 2]$ следующий функционал:

$$l(f) = \int_0^1 xf(x)dx - \int_{-1}^0 xf(x)dx?$$

2 (8). Разложите на $[-1, 1]$ по системе многочленов Лежандра функцию $x^2 + x - 1$. (Напоминание: для многочленов Лежандра $P_n(1) = 1$.)

3 (6). Дополните до полной ортогональной системы в $L_2[-\pi, \pi]$ набор векторов $\sin(nx)+\cos(nx)$, $n \geqslant 0$.

4 (8). Приблизьте на отрезке $[0, 1]$ функцию $f(x) = e^{x^2}$ многочленом так, чтобы выполнялось неравенство: $|P(x) - f(x)| < 1/100$.

5. Рассмотрим последовательность $D_n(x) = n^2 \left(\chi_{[0,\frac{1}{n}]} - \chi_{[-\frac{1}{n},0]}\right)$.

а (5). Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} xD_n(x)dx.$$

б (10). Для любой дважды гладкой функции f найдите

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)D_n(x)dx.$$

Вариант 1, Часть 2

6 (8). Вычислите преобразование Фурье $\tilde{f}$ для $f(x) = \cos(kx)\,\chi_{[-l,l]}(x)$, $(k, l > 0)$.

7 (14). Используя интеграл в комплексной области и вычеты, найдите преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{\cos kx}{1 + x + x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

8 (12). Считаем пространство быстро убывающих функций алгеброй над $\mathbb{R}$ относительно арифметического (поточечного) сложения и свёртки. Существует ли единичный элемент в этой алгебре?

9 (10). Определим числа b_n через разложение Тейлора $\frac{w}{e^w - 1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n w^n$. Выразите коэффициенты разложения Тейлора функции $x \operatorname{ctg} x = \sum B_n x^n$ в окрестности $x = 0$ через b_n и докажите, что $b_{2k+1} = 0$ при $k > 0$.

10 (14). Найдите значения функции $\Gamma(z) \sin \pi z$ в целых точках.