

Вариант 2

Задача 1. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ покрыта картами — параллельными проекциями на координатные оси. Следующий объект задан в координатах $(a, b) \rightarrow (a, b, \sqrt{1 - a^2 - b^2})$, запишите его в координатах $(\alpha, \beta) \rightarrow (-\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \alpha, \beta)$.

- a) Векторное поле $a\partial/\partial b$,
- b) 2-форма $da \wedge db$.

Задача 2. Найдите все векторные поля v на \mathbb{R}^3 , для которых $L_v(dx \wedge dy) = ydy \wedge dz$.

Задача 3. Вычислите объём (площадь) поверхности в \mathbb{R}^4 , заданной параметрически:

$$(\sin(\phi) - 2\sin(\psi), \sin(\phi) + 2\cos(\psi), \cos(\phi) - 2\sin(\psi), \cos(\phi) + 2\cos(\psi)), \quad 0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi.$$

Задача 4. Пусть $f, g, h : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, равные нулю в точке $x \in \mathbb{R}^5$, причём их дифференциалы df, dg и dh попарно непропорциональны в этой точке.

a) Докажите, что необходимое условие локального экстремума f при условии $g = h = 0$ в точке x равносильно необходимому условию локального экстремума g при условии $f = h = 0$ в этой точке.

b) Какая сигнатура формы может наблюдаться в достаточном условии локального экстремума f в точке x при условии $g = h = 0$, если g имеет локальный максимум при условии $f = h = 0$ в этой точке?

Задача 5. Данна кривая $C \subset \mathbb{R}^2$, заданная параметрически $(t^2(t-1), t(t-1)^2)$, где $0 \leq t \leq 1$.

- a) Вычислите $\int_C (y \sin(xy)dx + x \sin(xy)dy)$.

- b) Пусть D — область, ограниченная кривой C . Вычислите $\int_D ydx \wedge dy$.

Задача 6. Постройте 2-форму на дополнении пространства к шару $x^2 + y^2 + z^2 > 1$, лежащую в ядре дифференциала d , но не в образе d на этом многообразии.