Вариант 1

Задача 1. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ покрыта картами — параллельными проекциями на координатные оси. Следующий объект задан в координатах $(a, b) \to (a, b, -\sqrt{1 - a^2 - b^2})$, запишите его в координатах $(\alpha, \beta) \to (\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \alpha, \beta)$.

a) Векторное поле $b\partial/\partial a$,

b) 2-форма $da \wedge db$.

Задача 2. Найдите все векторные поля v на $\mathbb{R}^3$, для которых $L_v(dx \wedge dy) = xdy \wedge dz$.

Задача 3. Вычислите объём поверхности в $\mathbb{R}^4$, заданной параметрически:

$$(\sin(\phi) + 3\sin(\psi),\ \sin(\phi) - 3\cos(\psi),\ \cos(\phi) + 3\sin(\psi),\ \cos(\phi) - 3\cos(\psi)), \qquad 0 \leqslant \phi, \psi \leqslant 2\pi.$$

Задача 4. Пусть f, g, $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, равные нулю в точке $x \in \mathbb{R}^6$, причём их дифференциалы df, dg и dh попарно непропорциональны в этой точке.

a) Докажите, что необходимое условие локального экстремума f при условии $g = h = 0$ в точке x равносильно необходимому условию локального экстремума g при условии $f = h = 0$ в этой точке.

b) Какая сигнатура формы может наблюдаться в достаточном условии локального экстремума f в точке x при условии $g = h = 0$, если g имеет локальный минимум при условии $f = h = 0$ в этой точке?

Задача 5. Дана кривая $C \subset \mathbb{R}^2$, заданная параметрически $(t^2(t-1), t(t-1)^2)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

a) Вычислите $\int_C (y\cos(xy)dx + x\cos(xy)dy)$.

b) Пусть D — область, ограниченная кривой C. Вычислите $\int_D xdx \wedge dy$.

Задача 6. Постройте 2-форму на шаре без точки $0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1$, лежащую в ядре дифференциала d, но не в образе d на этом многообразии.