Указания и ответы к варианту 2 от 18 июня 2012

1. Применяем теорему Стокса к форме работы $\omega = ydx + 2xdy$; $d\omega = dx \wedge dy$.
Искомая работа равна площади области.
Ответ:$\frac{4}{3}$.

2.
$$\int_\Omega dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} xdy = \int_0^1 (t^4 - t^5)(1 - 6t^5)dt$$
Ответ:$\frac{7}{330}$.

3. Форма $\omega = \sin^4 xdx + \sin^3 ydy$ замкнута: $d\omega = 0$. Чтобы замкнутая форма ω была точной, достаточно и необходимо, чтобы ее интегралы по образующим первой группы гомологий равнялись нулю. Для точности на торе нужно равенство нулю интегралов
$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin^4 xdx \text{ и } I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^3 ydy.$$
Без вычислений: $I_2 = 0 \neq I_1$. Поэтому форма ω на торе не точна.
Точность на цилиндре равносильна равенству $I_2 = 0$.
Ответ: форма ω точна на цилиндре и не точна на торе.

4. a) Нужно проверить, что $dG \wedge dH(p) \neq 0$.
b)
$$\frac{df}{dg}(p) = \frac{dF \wedge dH}{dG \wedge dH}(p) = \frac{3\ln(2)_2}{5}$$

5. a) Чтобы отображение было локальным диффеоморфизмом в данной точке, нужна невырожденность его производной в этой точке.
$$2(az + b) \neq 0 \ \forall \ z : |z| < 1 \Leftrightarrow |b| \geq |a|.$$
b) Диффеоморфизм схраняет дивергенцию, если его производная сохраняет объем, что невозможно ни при каких a и b.
c) Конформное отображение всегда сохраняет направление градиента:
$$|b| \geq |a|.$$
d) Градиент сохраняется при изометриях и только при них, что невозможно ни при каких a и b.

6. Градиент сферически симметричной функции направлен по радиусу. Поле v имеет вид $v(x) = e^{-3r+2} r \frac{\bar{x}}{r}$. Поэтому искомый потенциал равен с точностью до прибавления константы
$$U(x) = F(|x|), \ F = \int e^{-3r+2} rdr.$$

Ответ:

$$F(r) = -e^{-3r+2}\left(\frac{r}{3} + \frac{1}{9}\right),\ U(x) = F(|x|).$$

7. a) Поле $v(x)$ – радиальное, следовательно, градиентное. Но rot grad $= 0$.
Ответ:

$$\text{rot } v \equiv 0.$$

b) По формуле $d^2 = 0$, имеем: div rot $= 0$. Но div $v \neq 0$ (простое вычисление).

8. Данная функция – гармоническая вне точек e_1, $-e_2$, e_3. Поток ее градиента через замкнутую поверхность равен сумме потоков того же градиента через сферы с центрами в тех точках e_1, $-e_2$, e_3, которые лежат внутри поверхности. Полуоси данного эллипсоида направлены по осям x_1, x_2, x_3 и равны $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{3}{6}}$ соответственно. Только точка e_1 лежит внутри эллипсоида.
Ответ: -4π.

9. Имеем: $d\omega = dV = dx \wedge dy \wedge dz$. По формуле Стокса, искомый интеграл равен объему тела внутри рассматриваемой поверхности.
Ответ: a) 1 b) 8π.

10. Коразмерность 2. Цилиндр диффеоморфен плоскости без точки, значит, цилиндр без точки диффеоморфен плоскости без 2 точек.