Указания и ответы к варианту 1 от 18 июня 2012

1. Применяем теорему Стокса к форме работы $\omega = ydx - xdy$; $d\omega = -2dx \wedge dy$. Искомая работа равна минус удвоенной площади области.
Ответ:$-\frac{8}{3}$.

2.
$$\int_\Omega dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} xdy = \int_0^1 (t^3 - t^5)(2t - 6t^5)dt$$

Ответ:$\frac{8}{1155}$.

3. Форма $\omega = \sin^3 xdx + \cos^2 ydy$ замкнута: $d\omega = 0$. Чтобы замкнутая форма ω была точной, достаточно и необходимо, чтобы ее интегралы по образующим первой группы гомологий равнялись нулю. Для точности на торе нужно равенство нулю интегралов

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin^3 xdx \text{ и } I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 ydy.$$

Без вычислений: $I_1 = 0 \neq I_2$. Поэтому форма ω на торе не точна.
Точность на цилиндре равносильна равенству $I_1 = 0$.
Ответ: форма ω точна на цилиндре и не точна на торе.

4. a) Нужно проверить, что $dG \wedge dH(p) \neq 0$.
b)
$$\frac{df}{dg}(p) = \frac{dF \wedge dH}{dG \wedge dH}(p) = \frac{7}{9}$$

5. a) Чтобы отображение было локальным диффеоморфизмом в данной точке, нужна невырожденность его производной в этой точке.

$$a + 2bz \neq 0 \ \forall \ z : |z| < 1 \Leftrightarrow |a| \geq 2|b|.$$

b) Диффеоморфизм схраняет дивергенцию, если его производная сохраняет объем:

$$b = 0, \ |a| = 1.$$

c) Конформное отображение всегда сохраняет направление градиента:

$$|a| \geq 2|b|.$$

d) Градиент сохраняется при изометриях и только при них:

$$b = 0, \ |a| = 1.$$

6. Градиент сферически симметричной функции направлен по радиусу. Поле v имеет вид $v(x) = e^{-2r+3} r \frac{\bar{x}}{r}$. Поэтому искомый потенциал равен

$$U(x) = F(|x|),\ F = \int e^{-2r+3} r dr.$$

Ответ:

$$F(r) = -e^{-2r+3}\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{4}\right),\ U(x) = F(|x|).$$

7. a) Поле $v(x)$ – радиальное, следовательно, градиентное. Но rot grad $= 0$.
Ответ:

$$\text{rot } v \equiv 0.$$

b) По формуле $d^2 = 0$, имеем: div rot $= 0$. Но div $v \neq 0$ (простое вычисление).

8. Данная функция – гармоническая вне точек $e_1, e_2, -e_3$. Поток ее градиента через замкнутую поверхность равен сумме потоков того же градиента через сферы с центрами в тех точках $e_1, e_2, -e_3$, которые лежат внутри поверхности. Полуоси данного эллипсоида направлены по осям x_1, x_2, x_3 и равны $\sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}$ и $\sqrt{\frac{5}{6}}$ соответственно. Только точка $-e_3$ лежит вне эллипсоида.
Ответ: -12π.

9. Имеем: $d\omega = dV = dx \wedge dy \wedge dz$. По формуле Стокса, искомый интеграл равен объему тела внутри рассматриваемой поверхности.
Ответ: a) 1 b) 8π.

10. Коразмерность 2. Граница малого диска с центром в выколотой точке ограничивает область на торе, и интеграл по этой границе от замкнутой формы равен нулю по формуле Стокса.