Я. Абрамов представляет:

# Классификация $SL_2$-орбит в конечномерном представлении

## Тезисы

В докладе обсуждается способ алгебро-геометрической стратификации пространства орбит произвольного конечномерного (необязательно неприводимого) $SL_2(\mathbb{k})$-представления. Пока что сформулирован лишь метод описания этой стратификации. В случае обнаружения у Вас вопросов к тексту, нахождения в нем неточностей или опечаток, непонимания Вами текста, пишите на zroslav@gmail.com

## Введение

Я опишу в этой заметке решение очень старой задачи теории инвариантов: алгебро-геометрическое (и отчасти комбинаторное) описание пространства $SL_2$-орбит конечномерного представления группы $SL_2(\mathbb{k})$.

Алгебро-геометрическое описание будет состоять в описании вложения этого пространства орбит в достаточно большое $\mathbb{P}^N$. Комбинаторное описание будет состоять в описании стратификации этого пространства на квазипроективные страты.

Эта задача стояла в теории инвариантов на протяжении 200 лет (можно сказать, что с нее и началась теория инвариантов). В 2010 году мой одногруппник Павел Бибиков привел ее решение, в котором я частично разобрался (а частично нет). Свою версию его решения я и привожу в настоящей заметке.

Метод, использованный здесь, это метод дифференциальных инвариантов, открытый и развитый С. Ли и его учениками, а потом на десятилетия забытый как алгебраистами, так и специалистами в теории дифференциальных уравнений.

Приложением данного описания является описание пространств модулей гиперэллиптических кривых, а также классов эквивалентности точек на пространствах Гурвица рациональной кривой.

## Напоминание из теории дифференциальных уравнений

Пусть $p\colon E \to B$ - локально тривиальное расслоение с гладкими слоем, базой и тотальным пространством. Впоследствии будет неважно, в какой именно категории мы работаем: в категории вещественных бесконечно гладких многообразий, в категории комплексных аналитических многообразий или в категории афинных алгебраических многообразий над полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики. Тогда имеются расслоения струй $j^k p\colon J^k(E) \to B$, состоящие из классов эквивалентности локальных сечений этого расслоения, где сечения эквивалентны, если их касание как касание подмногообразий в тотальном пространстве $E$ имеет порядок $k$. Пусть некая группа $G$ (из той же категории многообразий) действует на тотальном пространстве $E$, переводя локальные сечения в локальные сечения. Хорошо известным фактом является (а если нет, то является очень интересным упражнением) то, что тогда группа действует и на тотальных пространствах расслоений струй этого расслоения (по принципу $\partial^k_{x'} s'(x') = j^k(s(x))$), переводя локальные сечения в локальные сечения. Таким образом, действие группы продолжается до действия группы на тотальном пространстве расслоения струй бесконечного порядка: $j^\infty p\colon J^\infty(E) \to B$.

**Пример 1.** Пусть $M$ - некое многообразие, $G$ - группа, действующая на $M$. Тогда можно положить $E = M \times \mathbb{k}$, $B = M$, $p\colon E \to B$, $p\colon (x,a) \mapsto x$. Тогда все расслоения струй являюся векторными расслоениями, т.к. представляют из себя сумму симметрических $k$-х степень кокасательного расслоения: $J^n(E) = \bigoplus_{k=0}^n S^k(T^*M)$. Тогда $G$ действует на всех расслоениях струй линейно: $(dg^{-1})^T\colon S^k(T^*M) \to S^k(T^*M)$.

**Пример 2 (теория Пикара-Вессио).** Пусть $B = M$ - некое многообразие, $E = B \times \mathbb{k}^n = \{(x,y) \mid x \in M, y \in \mathbb{k}^n\}$, $G$ линейно действует на слое: $g\colon (x,y) \mapsto (x, gy)$. Тогда $J^k(E) = \bigoplus_{l=0}^k (S^l(T^*M))^n$. Пусть $y_{i,lx}$ - $i$-я $(1 \le i \le n)$ компонента $(S^l(T^*M))^n$. Тогда

$$g\colon (x, y_1, \ldots, y_n, y_{1,x}, \ldots, y_{n,x}, y_{1,xx}, \ldots, y_{n,xx}, \ldots, y_{1,kx}, \ldots y_{n,kx}) \mapsto$$
$$(x, f_1(g)(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(g)(y_1, \ldots, y_n),$$
$$f_1(g)(y_{1,x}, \ldots, y_{n,x}), \ldots, f_n(g)(y_{1,x}, \ldots, y_{n,x}),$$
$$f_1(g)(y_{1,2x}, \ldots, y_{n,2x}), \ldots, f_n(g)(y_{1,2x}, \ldots, y_{n,2x}), \ldots,$$
$$f_1(g)(y_{1,kx}, \ldots, y_{n,kx}), \ldots, f_n(g)(y_{1,kx}, \ldots, y_{n,kx}))$$

. (Отныне и в дальнейшем я буду обозначать через $p_{kx}$ координаты на расслоении струй, а через $Solut(s)^*(p_{kx})(x)$ струю какого-нибудь сеченя $s(x)$ - это образ гомоморфизм для вложения $j^\infty s = Solut(s)\colon B \to J^\infty(E)$)

На $\mathbb{k}(J^\infty(E))$ действуют естественные дифференцирования, индуцированные с векторных полей на $B$, переводящие функции от струй сечений в их производные вдоль этих векторных полей (т.е. имеется что-то, похожее на связность, но в расслоении струй).

**Пример 3.** $B = \mathbb{k}^n$, $E = B \times \mathbb{k}$. Тогда дифференцирование на $\mathbb{k}(J^\infty(E))$, индуцированное с векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ это

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_{x_i}\frac{\partial}{\partial p} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \ldots \le i_k \le n} p_{x_{i_1}\ldots x_{i_k} x_i} \frac{\partial}{\partial p_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}}}$$

(это формальная бесконечная сумма, тем не менее например на функциях, зависящих от конечного числа координат на $J^\infty(E)$, она корректно определена и при подстановке в эту функцию сечения расслоения она превращается в производную этой функции по координате базы $x_i$). Для функции $L \in \mathbb{k}(J^\infty(E))$ обозначим $L_{x_i} = \frac{d}{dx_i}L$.

**Дифференциальным уравнением** называется подмногообразие в тотальном пространстве расслоения струй $j^k p\colon J^k(E) \to B$, замкнутое относительно дифференцирований. Решением дифференциального уравнения называется сечение $s(x)$ расслоения $p\colon E \to B$, такое что $j^k s(x)$ для любого $x$ лежит в дифференциальном уравнении. Дифференциальное уравнение можно продолжить в расслоения струй более высокого порядка (дифференцируя задающие уравнения). Таким образом, дифференциальное уравнение можно продолжить в расслоение струй бесконечного порядка $j^\infty p\colon J^\infty(E) \to B$.

**Пример 4.** Пусть $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \Bbbk\}$, $E = B \times \Bbbk = \{(x_1, \ldots, x_n, p) \mid x_i \in \Bbbk, p \in \Bbbk\}$. Координаты на расслоении струй обозначим через $p_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}$, $0 \leq i_1 \leq i_2 \ldots \leq i_k \leq n$. Дифференциальным уравнением пусть будет $\{\sum_i p_{x_i x_i} = 0\} \subset J^2(E)$. Тогда продолжением в пространство струй бесконечного порядка нашего дифференциального уравнения будет

$$0 = \frac{d^k}{dx_{j_1} \ldots dx_{j_k}} (\sum_i p_{x_i x_i}) = \sum_i p_{x_i x_i x_{j_1} \ldots x_{j_k}}$$

по всем наборам $0 \leq j_1 \leq j_2 \ldots \leq j_k \leq n$.

**Пример 5.** Пусть $B = \Bbbk^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \Bbbk\}$, $E = B \times \Bbbk$, $f\colon (x,y,p) \mapsto (x,y)$. Дифференциальное уравнение возьмем такое: $\{xp_x + yp_y = np\} \subset J^1(E)$, где $n$ - натуральное число (так называемое уравнение Эйлера для однородных функций). Тогда его продолжениями в $J^2(E)$ будут

$$0 = \frac{d}{dx}(xp_x + yp_y - np) = xp_{xx} + yp_{xy} - (n-1)p_x,$$

$$0 = \frac{d}{dy}(xp_x + yp_y - np) = xp_{xy} + yp_{yy} - (n-1)p_y$$

. Общий же вид продолжения в $J^\infty(E)$ будет иметь вид:

$$0 = \frac{d^{k+l}}{dx^k dy^l}(xp_x + yp_y - np) = xp_{(k+1)\cdot x, l\cdot y} + yp_{k\cdot x,(l+1)\cdot y} - (n-k-l)p_{k\cdot x, l\cdot y}$$

.

Дифференциальное уравнение называется $G$**-инвариантным**, если его точки переходят в его точки при преобразованиях, принадлежащих $G$. Уравнение из примера 4 инвариантно относительно линейного на базе действия группы $SO_n(\Bbbk)$, а уравнение из примера 5 инвариантно относительно линейного на базе действия группы $SL_2(\Bbbk)$.

Определение. **Дифференциальным инвариантом** для действия группы $G$ называется функция на тотальном пространстве расслоения струй бесконечного порядка, инвариантная относительно действия группы. **Инвариантным дифференцированием** относительно действия группы $G$ называется дифференцирование на алгебре гладких функций на тотальном пространстве расслоения струй бесконечного порядка, коммутирующее при композиции с преобразованиями из группы $G$. **Инвариантным**

**дифференциальным оператором** относительно действия группы $G$ называется дифференциальный оператор на алгебре гладких функций на тотальном пространстве расслоения струй бесконечного порядка, коммутирующий при композиции с преобразованиями из группы $G$.

Равносильное определение инвариантного дифференцирования и инвариантного дифференциального оператора таково: это дифференцирование и дифференциальный оператор на алгебре дифференциальных инвариантов.

**Пример 6.** Пусть аддитивная группа поля $\Bbbk$ действует на расслоении $f\colon E \to B$, $B = \Bbbk^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \Bbbk\}$, $E = B \times \Bbbk = \{(x,y,p) \mid x,y,p \in \Bbbk\}$, $[t]\colon (x,y,p) \mapsto (x+ty^2, y, p)$, $t \in \Bbbk$. Тогда примерами дифференциальных инвариантов будут $y, p, p_x, p_{xx}, \ldots, p_{nx}, \ldots$. Примерами инвариантных дифференцирований являются $\frac{d}{dx}$ и $2x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}$. Примерами инвариантных дифференциальных операторов являются:

$$\sum_n \alpha_n(y, p, p_x, p_{xx}, \ldots, p_{nx}, \ldots)(\frac{d}{dx})^n.$$

(Тем не менее, это не все дифференциальные инварианты этого действия)

**Пример 7.** $G = SO_n$, $B = \Bbbk^n$, $E = B \times \Bbbk = \{(x_1, \ldots, x_n, p) \mid x_i \in \Bbbk, p \in \Bbbk\}$, $G$ действует на $B$ линейно стандартным способом. Приведу примеры дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференциальных операторов. $p$ - очевидный дифференциальный инвариант. Если $K, L$ - дифференциальные инварианты, то $\sum_i K_{x_i} L_{x_i}$ - тоже дифференциальный инвариант. $\sum_i K_{x_i x_i}$ - тоже дифференциальный инвариант. Коэффициенты многочлена $\det(K_{x_i x_j} + \lambda Id)$ - тоже дифференциальные инварианты. Примером инвариантного дифференцирования будет $\sum_i K_{x_i} \frac{d}{dx_i}$. Пример инвариантного дифференциального оператора - $\Delta = \sum_i \frac{d^2}{dx_i^2}$.

**Пример 8.** $G = SL_n$, $B = \Bbbk^n$, $E = B \times \Bbbk = \{(x_1, \ldots, x_n, p) \mid x_i \in \Bbbk, p \in \Bbbk\}$, $G$ действует на $B$ линейно стандартным способом. Приведу примеры дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференциальных операторов. $p$ - очевидный дифференциальный инвариант. Если $I_k$, $k = 1, \ldots, n$, - дифференциальные инварианты, то $\det(I_{i,x_j})_{ij}$ - дифференциальный инвариант. Кроме того, $\det(K_{ij})$, где для $i < n$ стоит $K_{ij} = I_{i,x_j}$, а $K_{nj} = \frac{d}{dx_j}$, - инвариантное дифференцирование. Если $I$ - дифференциальный инвариант, то $HypDet(I_{x_{j_1} \ldots x_{j_k}})_{j_1 \ldots j_k}$ - дифференциальный инвариант (частным случаем этого является гессиан $\det(I_{x_i x_j})_{ij})$ - т.к. это матрица однородной формы степени $k$ (так называемое приращение $k$-го порядка). Кроме того, $\sum_i x_i I_{x_i}$ - дифференциальный инвариант. Соответственно, $\sum_i x_i \frac{d}{dx_i}$ - инвариантное дифференцирование. Есть и более сложные примеры дифференциальных инвариантов, например если $I_{ij}$, $1 \le i \le j \le n$, - дифференциальные инварианты, то

$$\det(I_{ij,x_k x_l})_{((i,j),(k,l))|1 \le i \le j \le n, 1 \le k \le l \le n}$$

- дифференциальный инвариант.

Важным фактом в теории дифференциальных инвариантов является:

**Теорема 1 (Трессе-Ли).** *Алгебра инвариантных дифференциальных операторов порождена конечным числом дифференциальных инвариантов (являющихся функциями в* $J^{2dimG+1}(E)$*) и конечным числом инвариантных дифференцирований (количество которых равно размерности базы расслоения как многообразия).*

Замечание. Имеются точные алгоритмы нахождения алгебры инвариантных дифференциальных операторов в самом общем случае.

В примере 6 указанными дифференцированиями являются $\frac{d}{dx}$ и $2x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy}$, а базовыми образующими алгеры дифференциальных инвариантов - $y$, $p$ (в качестве упражнения можно проверить, почему).

Помимо этого существует факт, утверждающий, что дифференциальные инварианты это в каком-то смысле правильные инварианты для действия группы:

**Теорема 2.** *По алгебре дифференциальных инвариантов однозначно восстанавливается действие группы с точностью до его ядра неэффективности.*

Совершенно логично поэтому описывать орбиты действия группы с помощью алгебры дифференциальных инвариантов.

## Орбиты $SL_2$ в неприводимом представлении

Как описано в литературе по теории представлений групп и алгебр Ли, конечномерные представления группы $SL_2$ раскладываются в прямую сумму неприводимых, а неприводимые представления имеют вид

$$V_n = \{\sum_i a_i x^i y^{n-i} \mid a_i \in \Bbbk, 0 \le i \le n\}.$$

Заметим, что элементы неприводимых представлений удовлетворяют уравнению Эйлера

$$xf_x + yf_y = nf.$$

Опишем орбиты в неприводимых представлениях.

**Теорема 3 (Бибиков).** *Алгебра дифференциальных инвариантов для действия* $SL_2$ *на тривиальное расслоение* $\Bbbk^2 \times \Bbbk$*, ограниченная на уравнение Эйлера имеет вид* $\Bbbk[p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \ldots, \nabla^k H, \ldots]$*, где* $H = p_{xx}p_{yy} - (p_{xy})^2$, $\nabla = p_y\frac{d}{dx} - p_x\frac{d}{dy}$.

**Доказательство.** Замечу, что я уже доказал то, что элементы алгебры $\Bbbk[p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \ldots, \nabla^k H, \ldots]$ являются дифференциальными инвариантами. Докажу теперь, что это только они.

Замечу, что любая функция на $J^\infty(E)$ (ограниченная на наше дифференциальное уравнение) выражается через $x, y, p, p_x, p_{xx}, \ldots, p_{nx}, \ldots$:

$$p_{kx,(l+1)y} = (n-k-l)\frac{1}{y}p_{kx,ly} - \frac{x}{y}p_{(k+1)x,ly},$$

$$p_{(k+1)x,ly} = (n-k-l)\frac{1}{y}p_{(k+1)x,(l-1)y} - \frac{x}{y}p_{(k+2)x,(l-1)y},$$

$$p_{(k+2)x,(l-1)y} = (n-k-l)\frac{1}{y}p_{(k+2)x,(l-2)y} - \frac{x}{y}p_{(k+3)x,(l-2)y},$$

$$\dots,$$

$$p_{(k+l+1)x,y} = (n-k-l)\frac{1}{y}p_{(k+l)x} - \frac{x}{y}p_{(k+l-1)x}.$$

Таким образом, дифференциальные инварианты лежат в алгебре $\Bbbk(y)[x, p, p_x, p_{xx}, \dots, p_{nx}, \dots]$.

Вычислю $H$ через производные по $x$: $H = \frac{n-1}{y^2}(np_{xx}p - (n-1)(p_x)^2)$. Следовательно, $H$ является аффинной функцией по $p_{xx}$. Следовательно, $\nabla H$ является аффинной функцией по $p_{xxx}$. И следовательно, $\nabla^k H$ является аффинной функцией по $p_{(k+2)x}$. Таким образом,

$$p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \dots, \nabla^k H, \dots$$

- независимы алгебраически, т.к. алгебраически независимы

$$p, p_{xx}, p_{xxx}, \dots, p_{kx}, \dots$$

Кроме того, мы получаем, что поле $\Bbbk(x, y, p, p_x, p_{xx}, \dots, p_{kx}, \dots)$ совпадает с полем $\Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p, p_x) = \Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p_x, p_y)$.

**Утверждение.** *В поле $\Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p, p_x)$ дифференциальными инвариантами являются только элементы поля $\Bbbk(H, \nabla H, \nabla^2 H, \dots, \nabla^k H, \dots)(p)$.*

**Доказательство утверждения.** Замечу, что в поле $\Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(x, y, p_x, p_y)$ инвариантами могут быть только элементы $\Bbbk(H, \nabla H, \dots, \nabla^k H, \dots)(xp_x + yp_y)$ (т.к. в прямой сумме $SL_2$-представления $V_1$ и его двойственного $(V_1)^*$ инвариантами являются только функции от свертки $xp_x + yp_y$). Доказательство утверждения окончено.

Таким образом, кольцо дифференциальных инвариантов является кольцом целых функций поля $\Bbbk(H, \nabla H, \nabla^2 H, \dots, \nabla^k H, \dots)(p)$, т.е. алгебра $\Bbbk[p, H, \nabla H, \nabla^2 H, \dots, \nabla^k H, \dots]$. Теорема доказана.

В $J^n(E)$ имеется дифференциальное уравнение $\varepsilon^{(n)}$, являющееся продолжением дифференциального уравнения $\varepsilon^{(1)} = \{xp_x + yp_y - np = 0\}$ из $J^1(E)$. Размерность $\varepsilon^{(n)}$ (поскольку на $\varepsilon^{(n)}$ имеются координаты $(x, y, p_{nx}, p_{(n-1)x,y}, p_{(n-2)x,2y}, \dots, p_{ny})$) равна $n+3$. Имеется расслоение

$$F\colon \varepsilon^{(n)} \to \varepsilon^{(n)}//SL_2 = \{(p, H, \nabla H, \dots, \nabla^{n-2} H)\}$$

(по доказанной теореме Бибикова это пространство является категорным фактором $\varepsilon^{(n)}$). Как многообразие $\varepsilon^{(n)}$ изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^{n+3}$. Изоморфизм можно построить как выбор координат

$$(x, y, p_{nx}, p_{(n-1)x,y}, p_{(n-2)x,2y}, \dots, p_{ny}).$$

При таком изоморфизме действие $SL_2$ на $\varepsilon^{(n)}$ изоморфно как действие линейному $SL_2$-представлению $V_1 \oplus V_n$.

Нам понадобится следующая теорема:

**Теорема 4.** *Множество точек с незамкнутыми $SL_2$-орбитами в $\varepsilon^{(n)}$ имеет вид $(a,b) \oplus f(x,y)$, где $(a,b)$ - корень $f(x,y)$ порядка не меньше $\frac{n}{2}$.*

**Доказательство теоремы.** В силу критерия Винберга-Попова замкнутости орбиты редуктивной группы (верной, кстати, в поле любой характеристики), $SL_2$-орбита элемента линейного $SL_2$-представления замкнута тогда и только тогда, когда замкнута $T$-орбита этого элемента, где $T$ - максимальный тор в $SL_2$. Выберем координаты $(x,y)$ так, чтобы $T$ действовал как $diag(\lambda, \lambda^{-1})$. Тогда $T$ действует на элемент $V_1 \oplus V_n$ как

$$(\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda^{-n} p_{nx}, \dots, \lambda^{2i-n} p_{(n-i)x,iy}, \dots, \lambda^n p_{ny}).$$

$T$-орбита замкнута в том и только в том случае, если координаты, умножающиеся на $\lambda$ в отрицательной (или наоборот положительной) степени, равны 0. Но это и означает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Обозначим через $K$ множество точек $\varepsilon^{(n)}$ из незамкнутых $SL_2$-орбит. Из только что доказанной теоремы следует, что коразмерность $K$ в $\varepsilon^{(n)}$ больше 1. Если же $n > 1$, то коразмерность $F(K)$ в $\varepsilon^{(n)}//SL_2$ больше 1. По критерию Игусы категорно-факторности в любом слое $F$ ровно одна замкнутая $SL_2$-орбита. По критерию Игусы опять же слои над $\varepsilon^{(n)}//SL_2$ в $\varepsilon^{(n)} \backslash K$ все слои неприводимы и изоморфны фактору $SL_2$ по какой-то замкнутой подгруппе (стабилизатору точки слоя - из теоремы о размерности слоя следует, что этот стабилизатор дискретен). таким образом, прообраз в $\varepsilon^{(n)} \backslash K$ неприводимого двумерного замкнутого подмножества в $\varepsilon^{(n)}//SL_2$ неприводим и имеет размерность 5 (а прообраз одномерного неприводимого есть 4-мерное неприводимое).

Подставим теперь вместо координат $p_{kx,ly}$ соответствующие струи для некоторого полиномиального сечения $s(x,y)$ расслоения $E \to B$ (т.е. вместо $p_{kx,ly}$ я подставил полиномиальную функцию $Solut(s)^*(p_{kx,ly})(x,y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} s(x,y)$ - это образы гомоморфизма $Solut(s)^* : \Bbbk[B] \to \Bbbk[J^\infty(E)]$, индуцированного подставлением конкретного сечения $s(x,y)$). Тогда образы любых 3 дифференциальных инвариантов $Solut(s)^*(F_1)(x,y)$, $Solut(s)^*(F_2)(x,y)$ и $Solut(s)^*(F_3)(x,y)$ удовлетворяют полиномиальному соотношению

$$Z(Solut(s)^*(F_1), Solut(s)^*(F_2), Solut(s)^*(F_3)) = 0$$

(это следует из того, что невозможно вложить кольцо многочленов от 3 переменных в кольцо многочленов от 2 переменных - должно быть нетривиальное ядро). Таким образом, имеется идеал $I_{s(x,y)}$ в $\Bbbk[p, H, \nabla H, \dots, \nabla^{n-2} H]$ соотношений для образов конечного числа дифференциальных инвариантов

$$s(x,y) = Solut(s)^*(p)(x,y),$$

$$Hess(x,y) = Solut(s)^*(H)(x,y),$$

$$J_1(x,y) = Solut(s)^*(\nabla H)(x,y),$$
$$\dots,$$
$$J_{n-2}(x,y) = Solut(s)^*(\nabla^{n-2} H)(x,y)$$
($n$ есть степень многочлена $s(x,y)$).

**Утверждение.** *Если $SL_2$-орбита точки $s(x,y) \in V_n$ 2-мерна, то $J_1(x,y) = 0$, а идеал $I_{s(x,y)}$ задает одномерное подмногообразие*

**Доказательство утверждения.** Единственные две 2-мерные орбиты это орбиты $x^n$ и $(xy)^{\frac{n}{2}}$. Для них обеих утверждение проверяется простым подсчетом.

Следующая теорема является модификацией похожей теоремы Бибикова (и доказательство имеет похожее):

**Теорема 5.** *$SL_2$-орбиты двух многочленов $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их идеалы соотношений $I_{f_1(x,y)}$ и $I_{f_2(x,y)}$.*

**Доказательство.** Значения $Solut(f_i)^*(I)(g(x,y))$ и $Solut(f_i)^*(I)(x,y)$, где $I$ дифференциальный инвариант, совпадают. Поэтому, если орбиты совпадают, то соотношения между значениями в точках одни и те же. Значит, идеалы соотношений тоже совпадают.

Пусть теперь идеалы соотношений совпадают. Идеалу $I_{s(x,y)}$ в $\Bbbk[p, H, \nabla H, \dots, \nabla^{n-2} H]$ (т.е. ядру гомоморфизма $Solut(s)^*$ в $\Bbbk[B] = \Bbbk[x,y]$) сопоставлю идеал $I(V(F^*(I_{s(x,y)})))$ в $\Bbbk[\varepsilon^{(n)}] = \Bbbk[\varepsilon^{(n)} \backslash K]$ (идеал полного прообраза сечения как вложения). Значит, совпадают идеалы $I_1 = I(V(F^*(I_{f_1(x,y)})))$ и $I_2 = I(V(F^*(I_{f_2(x,y)})))$.

$SL_2$-орбита $\{j^n f_i(x,y)\} = \{(x, y, f_i(x,y), f_{i,x}(x,y), f_{i,y}(x,y), \dots, f_{i,nx}(x,y), f_{i,(n-1)x,y}, \dots f_{i,ny}(x,y))\}$ как подмногообразия в $J^n(E)$ лежит в $V(I_1)$. $V(I_1)$ имеет размерность 5, если орбита $f_i(x,y) \in V_n$ 3-мерна, и размерность 4, если орбита $f_i(x,y) \in V_n$ 2-мерна. Значит, поскольку размерность орбиты множества $\{j^n f_i(x,y)\}$ равна два плюс размерность орбиты $f_i(x,y)$ как элемента $V_n$, то размерность $V(I_1)$ совпадает с размерностью орбиты множества $\{j^n f_i(x,y)\}$.

Таким образом, орбиты множеств $\{j^n f_1(x,y)\}$ и $\{j^n f_2(x,y)\}$ пересекаются, а значит можно выбрать такие представители орбит $f_i(x,y)$, $i = 1,2$, что $\{j^n g_1(f_1)(x,y)\}$ и $\{j^n g_2(f_2)(x,y)\}$ пересекаются. Но поскольку на координатах $p_{kx,(n-k)y}$ в точке пересечения стоят коэффициенты многочленов $g_i(f_i)(x,y)$ (умноженные на $k!(n-k)!$), то эти два многочлена равны. Значит, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ лежат на одной $SL_2$-орбите. Теорема доказана.

Таким образом, я доказал, что орбиты линейного представления $SL_2$ описываются идеалами специального вида. Можно ввести на пространстве орбит стратификацию, например после лексикографического упорядочивания мономов можно ввести стратификацию, где страты нумеруются степенями старших мномов базиса Гребнера этого идеала. Таких стратификаций получается много (в зависимости от того, в каком порядке ввести лексикографический порядок). Можно также стратифицировать пространство с нумерацией клеток степенями мономов, у которых стоит ненулевой коэффициент в одном из элементов редуцированного базиса Гребнера идеала. Это еще более подробная стратификация. Помимо этого можно вводить аналогичную стратификацию по старшим мономам в каком-то порядке у универсального базиса Гребнера или по момномам с ненулевыми коэффициентом у какого-то элемента этого базиса. Стратификаций можно ввести много и работы с ними пока что непочатый край...

**Пример 9.** Пусть $n = 2$. Тогда $Hess(x,y) = D(f(x,y))$ - дискриминант формы $f(x,y)$. Тогда идеал $I_{f(x,y)}$ имеет вид $H - c$, $c \in \Bbbk$ (действительно, орбита формы степени 2 однозначно определяется своим дискриминантом). Полученная стратификация - 0-мерная клетка (из 1 точки) с меткой $(((0,1)))$ и 1-мерная клетка (изоморфная $\Bbbk^*$) с меткой $(((0,1),(0,0)))$.

Кроме того, приведенная конструкция остается верной в случае, если характеристика поля не делит $n!$ (все использованные мною теоремы доказываются без изменений). Поэтому можно не только исследовать пространство орбит над полями положительной характеристики, но и иследовать топологию пространства орбит методом Вейля (т.е. редуцировать в конечные поля).

Перейду теперь к рассмотрению аналогичного вопроса о приводимом конечномерном представлении.

## Орбиты $SL_2$ в приводимых конечномерных представлениях

Пусть $SL_2$-представление имеет вид $V = \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$. Я построю в этом параграфе конструкцию для пространства $SL_2$-орбит представления $V$, аналогичную построенной в предыдущем параграфе.

Положим $B = \{(x,y)\}$, $E = B \times \Bbbk^m = B \times \bigoplus_{i=1}^m \Bbbk = \bigoplus_{i=1}^m E_i$, $SL_2$ линейно действует на базе, дифференциальное уравнение имеет вид $\varepsilon_i^{(1)} = \{xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i\}$.

Примерами дифференциальных инвариантов являются $p_i$, $i = 1,\dots,m$, $H_i = p_{i,xx}p_{i,yy} - (p_{i,xy})^2$, $i = 1,\dots,m$. Примерами инвариантных дифференцирований являются $\nabla_i = p_{i,x}\frac{d}{dy} - p_{i,y}\frac{d}{dx}$.

**Теорема 6.** *Алгебра дифференциальных инвариантов на $E$ (ограниченная на $xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i$, $i = 1,\dots,m$) для действия $SL_2$ имеет вид*

$$\Bbbk[p_1,\dots,p_m,\nabla_i p_j (1 \le i,j \le m), H_i(i=1,\dots,m),$$

$$\nabla_i H_i(i=1,\dots,m),\dots,\nabla_i^k H_i(i=1,\dots,m),\dots]/$$

$$(\nabla_i p_i = 0,$$

$$\nabla_i p_j = -\nabla_j p_i,$$

$$\nabla_i p_j \nabla_k p_l + \nabla_i p_l \nabla_j p_k + \nabla_i p_k \nabla_l p_j = 0,$$

$$n_i p_i \nabla_j p_l + n_j p_j \nabla_k p_i + n_k p_k \nabla_j p_i = 0)$$

*, т.е. алгебре функций на произведении проективного конуса* $CGr(2, m+1) = \{(\det\left(\begin{smallmatrix} y & -x \\ p_{i,x} & p_{i,y} \end{smallmatrix}\right), \det\left(\begin{smallmatrix} p_{i,x} & p_{i,y} \\ p_{j,x} & p_{j,y} \end{smallmatrix}\right))\}$ *над грассманианом и бесконечномерного проаффинного пространства* $\{(\nabla^k H_i, i = 1, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, l, \ldots)\}$.

**Доказательство теоремы.** Замечу, что я уже доказал то, что элементы алгебры $\Bbbk[p_1, \ldots, p_m, \nabla_i p_j (1 \le i, j \le m), H_i (i = 1, \ldots, m), \nabla_i H_i (i = 1, \ldots, m), \ldots, \nabla_i^k H_i (i = 1, \ldots, m), \ldots]$ являются дифференциальными инвариантами. Докажу теперь, что это только они.

Замечу, что любая функция на $J^\infty(E)$ (ограниченная на $xp_{i,x} + yp_{i,y} = n_i p_i$) выражается через $x, y, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \ldots, p_{i,nx}, \ldots$ $(i = 1, \ldots, m)$:

$$p_{i,kx,(l+1)y} = (n-k-l)\frac{1}{y} p_{i,kx,ly} - \frac{x}{y} p_{i,(k+1)x,ly},$$

$$p_{i,(k+1)x,ly} = (n-k-l)\frac{1}{y} p_{i,(k+1)x,(l-1)y} - \frac{x}{y} p_{i,(k+2)x,(l-1)y},$$

$$p_{i,(k+2)x,(l-1)y} = (n-k-l)\frac{1}{y} p_{i,(k+2)x,(l-2)y} - \frac{x}{y} p_{i,(k+3)x,(l-2)y},$$

$$\ldots,$$

$$p_{i,(k+l+1)x,y} = (n-k-l)\frac{1}{y} p_{i,(k+l)x} - \frac{x}{y} p_{i,(k+l-1)x}.$$

Таким образом, дифференциальные инварианты лежат в алгебре $\Bbbk(y)[x, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \ldots, p_{i,nx}, \ldots]_{i=1,\ldots,m}$.

Вычислю $H_i$ через производные по $x$: $H_i = \frac{n-1}{y^2}(np_{i,xx}p_i - (n-1)(p_{i,x})^2)$. Следовательно, $H_i$ является аффинной функцией по $p_{xx}$. Следовательно, $\nabla_i H_i$ является аффинной функцией по $p_{i,xxx}$. И следовательно, $\nabla_i^k H_i$ является аффинной функцией по $p_{i,(k+2)x}$. Таким образом,

$$p_i, H_i, \nabla_i H_i, \nabla_i^2 H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots,$$

$$i = 1, \ldots, m$$

- независимы алгебраически, т.к. алгебраически независимы

$$p_i, p_{i,xx}, p_{i,xxx}, \ldots, p_{i,kx}, \ldots$$

.

Кроме того, мы получаем, что поле $\Bbbk(x, y, p_i, p_{i,x}, p_{i,xx}, \ldots, p_{i,kx}, \ldots)$ совпадает с полем

$$\Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots)(x, y, p_i, p_{i,x}) = \Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots)(x, y, p_{i,x}, p_{i,y}).$$

**Утверждение.** *В поле* $\Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots)_{i=1,\ldots,m}(x, y, p_i, p_{i,x})$ *дифференциальными инвариантами являются только элементы поля*

$$\Bbbk(H_i, \nabla_i H_i, \nabla_i^2 H_i, \ldots, \nabla_i^k H_i, \ldots)_{i=1,\ldots,m}(p_i, \nabla_i p_j)_{1 \le i < j \le m}.$$

**Доказательство утверждения.** Замечу, что в поле $\Bbbk(\nabla_i^k H_i)(x,y,p_{i,x},p_{i,y})$ инвариантами могут быть только $\Bbbk(\nabla_i^k H_i)(xp_{i,x}+yp_{i,y}, p_{i,x}p_{j,y}-p_{i,y}p_{j,x})$ (т.к. в прямой сумме $SL_2$-представления $V_1$ и $m$ штук ему двойственных $(V_1)^*$ инвариантами являются только функции от сверток $xp_{i,x}+yp_{i,y}$ и определителей $p_{i,x}p_{j,y}-p_{i,y}p_{j,x}$). Доказательство утверждения окончено.

Таким образом, кольцо дифференциальных инвариантов является кольцом целых функций поля $\Bbbk(\nabla_i^k H_i)(p_i, \nabla_i p_j)$, т.е. алгебра $\Bbbk[p_i, \nabla_i p_j, \nabla_i^k H_i]$ (т.к. это кольцо целых для поля частных кольца, являющегося фактором градуированной алгебры по однородному идеалу). Теорема доказана.

**Пример 10.** Если $V = V_n \oplus V_m$, то $(\Bbbk[J^\infty(E)]/(xp_{i,x}+yp_{i,y}=n_i p_i))^{SL_2}$ изоморфна $\Bbbk[p_1, p_2, \nabla_1 p_2, \nabla_1^k H_1, \nabla_2^k H_2]_{k\geq 0}$ (т.е. полиномиальной алгебре без соотношений).

В $\bigoplus_{i=1}^m J^{n_i}(E)$ имеется подмногообразие $\varepsilon = \bigoplus_{i=1}^m \varepsilon_i^{(n_i)}$ (прямая сумма над $B = \{(x,y)\}$), Размерность $\varepsilon$ (поскольку на $\varepsilon_i^{(n_i)}$ имеются координаты $x, y, p_{i,n_i x}, p_{i,(n_i-1)x,y}, p_{i,(n_i-2)x,2y}, \ldots, p_{i,n_i y}$) равна $m+2+\sum_{i=1}^m n_i$. Имеется расслоение

$$F\colon \varepsilon \to \varepsilon//SL_2 = \{(p_i, \nabla_i p_j, \nabla_i^k H_i)\}$$

(по доказанной теореме это пространство является категорным фактором $\varepsilon$). Как многообразие $\varepsilon$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{m+2+\sum_{i=1}^m n_i}$. Изоморфизм можно построить как выбор координат $x, y, p_{i,(n_i-k)x,ky}$. При таком изоморфизме действие $SL_2$ на $\varepsilon$ изоморфно как действие линейному $SL_2$-представлению $V_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$.

Нам понадобится следующая теорема:

**Теорема 7.** *Множество точек с незамкнутыми $SL_2$-орбитами в $\varepsilon$ имеет вид $(a,b) \oplus \bigoplus_{i=1}^m f_i(x,y)$, где $(a,b)$ - корень $f_i(x,y)$ порядка не меньше $\frac{n_i}{2}$ для любого $i = 1, \ldots, m$.*

**Доказательство теоремы.** В силу критерия Винберга-Попова замкнутости орбиты редуктивной группы (верной, кстати, в поле любой характеристики), $SL_2$-орбита элемента линейного $SL_2$-представления замкнута тогда и только тогда, когда замкнута $T$-орбита этого элемента, где $T$ - максимальный тор в $SL_2$. Выберем координаты $(x,y)$ так, чтобы $T$ действовал как $diag(\lambda, \lambda^{-1})$. Тогда $T$ действует на элемент $V_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$ как

$$(\lambda x, \lambda^{-1} y, \lambda^{2k-n_i} p_{i,(n_i-k)x,ky})$$

. $T$-орбита замкнута в том и только в том случае, если координаты, умножающиеся на $\lambda$ в отрицательной (или наоборот положительной) степени, равны 0. Но это и означает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Обозначим через $K$ множество точек $\varepsilon$ из незамкнутых $SL_2$-орбит. Из только что доказанной теоремы следует, что коразмерность $K$ в $\varepsilon$ больше 1. Если же $\sum_i n_i > 1$, то коразмерность $F(K)$ в $\varepsilon//SL_2$ больше 1. По критерию Игусы категорно-факторности в любом слое $F$ ровно одна замкнутая $SL_2$-орбита. По критерию Игусы опять же слои над $\varepsilon//SL_2$ в $\varepsilon \backslash K$

все слои неприводимы и изоморфны фактору $SL_2$ по какой-то замкнутой подгруппе (стабилизатору точки слоя - из теоремы о размерности слоя следует, что этот стабилизатор дискретен). таким образом, прообраз в $\varepsilon\backslash K$ неприводимого двумерного замкнутого подмножества в $\varepsilon//SL_2$ неприводим и имеет размерность 5 (а прообраз одномерного неприводимого есть 4-мерное неприводимое).

Подставим теперь вместо координат $p_{i,kx,ly}$ соответствующие струи для некоторого полиномиального сечения $s(x,y) = (s_i(x,y))_{i=1,\dots,m}$ расслоения $E \to B$ (т.е. вместо $p_{i,kx,ly}$ я подставил полиномиальную функцию $Solut(s)^*(p_{i,kx,ly})(x,y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} s_i(x,y)$ - это образы гомоморфизма $Solut(s)^* \colon \Bbbk[B] \to \Bbbk[J^\infty(E)]$, индуцированного подставлением конкретного сечения $s(x,y)$). Тогда образы любых 3 дифференциальных инвариантов $Solut(s)^*(F_1)(x,y)$, $Solut(s)^*(F_2)(x,y)$ и $Solut(s)^*(F_3)(x,y)$ удовлетворяют полиномиальному соотношению

$$Z(Solut(s)^*(F_1), Solut(s)^*(F_2), Solut(s)^*(F_3)) = 0$$

(это следует из того, что невозможно вложить кольцо многочленов от 3 переменных в кольцо многочленов от 2 переменных - должно быть нетривиальное ядро). Таким образом, имеется идеал $I_{s(x,y)}$ в

$$A = \Bbbk[p_i, \nabla_i p_j, H_1, \nabla_1 H_1, \dots, \nabla_1^{n_1-2} H_1,$$
$$H_2, \nabla_2 H_2, \dots, \nabla_2^{n_2-2} H_2, \dots, H_m, \nabla_m H_m, \dots, \nabla_m^{n_m-2} H_m]$$

соотношений для образов конечного числа дифференциальных инвариантов

$$\begin{gathered} s_i(x,y) = Solut(s)^*(p_i)(x,y), \\ Hess_i(x,y) = Solut(s)^*(H_i)(x,y), \\ J_{i,1}(x,y) = Solut(s)^*(\nabla_i H_i)(x,y), \\ \dots, \\ J_{i,n_i-2}(x,y) = Solut(s)^*(\nabla_i^{n_i-2} H_i)(x,y), \\ D_{ij}(x,y) = Solut(s)^*(\nabla_i p_j)(x,y) \end{gathered}$$

($n_i$ есть степень многочлена $s_i(x,y)$).

**Утверждение.** *Если $SL_2$-орбита точки $s(x,y) \in V_n$ 2-мерна, то $J_{i,1}(x,y) = 0$, а идеал $I_{s(x,y)}$ задает одномерное подмногообразие.*

**Доказательство утверждения.** Утверждение следует из аналогичного утверждения о неприводимых представлениях, доказанного выше.

Следующая теорема является обобщением финальной теоремы предыдущего параграфа (и доказательство имеет похожее):

**Теорема 8.** *$SL_2$-орбиты двух наборов многочленов $f_1(x,y) = (f_{1,i}(x,y))_{i=1}^m$ и $f_2(x,y) = (f_{2,i}(x,y))_{i=1}^m$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их идеалы соотношений $I_{f_1(x,y)}$ и $I_{f_2(x,y)}$.*

**Доказательство.** Значения $Solut(f_k)^*(I)(g(x,y))$ и $Solut(f_k)^*(I)(x,y)$, где $I$ дифференциальный инвариант, совпадают. Поэтому, если орбиты совпадают, то соотношения между значениями в точках одни и те же. Значит, идеалы соотношений тоже совпадают.

Пусть теперь идеалы соотношений совпадают. Идеалу $I_{s(x,y)}$ в $A = \Bbbk[\varepsilon//SL_2]$ (т.е. ядру гомоморфизма $Solut(s)^*$ в $\Bbbk[B] = \Bbbk[x,y]$) сопоставлю идеал $I(V(F^*(I_{s(x,y)})))$ в $\Bbbk[\varepsilon] = \Bbbk[\varepsilon \backslash K]$ (идеал полного прообраза сечения как вложения). Значит, совпадают идеалы $I_1 = I(V(F^*(I_{f_1(x,y)})))$ и $I_2 = I(V(F^*(I_{f_2(x,y)})))$.

$SL_2$-орбита множества $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\} = \{(x, y, f_{k,i}(x,y), f_{k,i,x}(x,y), f_{k,i,y}(x,y), \ldots, f_{k,i,n_i x}(x,y), f_{k,i,(n_i-1)x,y}, \ldots f_{k,i,n_i y}(x,y)), \ldots\}$ как подмногообразия в $\bigoplus_{i=1}^m J^{n_i}(E)$ лежит в $V(I_1)$. $V(I_1)$ имеет размерность 5, если орбита $f_k(x,y) \in \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$ 3-мерна, и размерность 4, если орбита $f_k(x,y) \in \bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$ 2-мерна. Значит, поскольку размерность орбиты множества $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} f_{2,i}(x,y)\}$ равна два плюс размерность орбиты $f_k(x,y)$ как элемента $\bigoplus_{i=1}^m V_{n_i}$, то размерность $V(I_1)$ совпадает с размерностью орбиты множества $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\}$.

Таким образом, орбиты множеств $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} f_{1,i}(x,y)\}$ и $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} f_{k,i}(x,y)\}$ пересекаются, а значит можно выбрать такие представители орбит $f_k(x,y)$, $k = 1, 2$, что $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} g_1(f_{1,i})(x,y)\}$ и $\{\bigoplus_{i=1}^m j^{n_i} g_2(f_{2,i})(x,y)\}$ пересекаются. Но поскольку на координатах $p_{i,lx,(n_i-l)y}$ в точке пересечения стоят коэффициенты многочленов $g_k(f_k)_i(x,y)$ (умноженные на $l!(n-l)!$), то эти два набора многочленов равны. Значит, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ лежат на одной $SL_2$-орбите. Теорема доказана.

Литература:

Винберг, Попов, "Геометрическая теория инвариантов"

Овсянников, "Групповой анализ дифференциальны уравнений"

В.Л. Попов, "О замкнутости некоторых орбит алгебраических групп", Функц. анализ и его прил., 31:4 (1997), 76-79

B. Kruglikov, V. Lychagin, "Invariants of pseudogroup actions: Homological methods and Finiteness theorem", arXiv:math/0511711v2 [math.DG]