ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Колесников

Лекция 1

Элементарная теория вероятностей. Основные понятия и классические модели.

Пусть нам дано конечное множество

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\},$$

называемое в дальнейшем пространством элементарных исходов. Элементы множества Ω называются элементарными исходами. Всевозможные подмножества Ω называются событиями. Всего существует 2^M событий.

Как правило, в задачах по теории вероятностей множество Ω не задано явно и его надо сконструировать (или воспользоваться готовой стандартной конструкцией).

Операции над множествами

1) Сложение (объединение): $A + B$ $(A \cup B)$
2) Произведение (пересечение): AB $(A \cap B)$
3) Дополнение: A^c $(\Omega \setminus A)$
4) Разность: $A \setminus B$
5) Симметрическая разность: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Пример 1. *Монета подбрасывается n раз подряд. Результат подбрасывания записывается как последовательность выпавших гербов и решеток. Это — элементарный исход. Всего множество Ω содержит 2^n элементарных исходов. Например, при двух подбрасываниях*

$$\Omega = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}, \text{РР}\}.$$

Примеры событий: $A = \{$*выпало одинаковое количество гербов и решеток*$\} = \{\text{ГР}, \text{РГ}\}$, $B = \{$*первым выпал герб*$\} = \{\text{ГГ}, \text{ГР}\}$.

Пример 2. *Дано n различных элементов. Производится выборка k $(1 \le k \le n)$ элементов из n. Результат выборки — элементарный исход.*

Необходимо различать два важных случая. Выборки могут быть упорядоченными и неупорядоченными. В каждом случае получается свое пространство элементарных исходов. Число упорядоченных выборок может быть найдено по формуле

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Если мы имеем дело с неупорядоченными выборками, то их число меньше ровно в $k!$ раз (число возможных перестановок множества их k элементов) и равно

$$C_n^k = \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Элементарные свойства операций над множествами (правила де Моргана)

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)^c$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)^c$$

Определение 1. *Функция P, сопоставляющая каждому событию $A \subset \Omega$ число, называется вероятностью (вероятностным распределением), если*

1)
$$0 \le P(A) \le 1$$

2)
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

для непересекающихся событий A, B.

Замечание 1. *Очевидно, свойство 2) (аддитивность) распространяется на конечные наборы непересекающихся событий*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \ne j.$$

Несколько забегая вперед, отметим, что в случае бесконечных Ω требуется выполнение более сильного свойства (счетная аддиттивность)

$$P\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \ne j.$$

Замечание 2. *В силу конечности Ω функцию P достаточно задать на каждом элементарном исходе. Тогда в силу аддитивности*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

Пример 3. *В ситуации примера 1 предположим, что выпадение герба и решетки равновероятно. Тогда все элементарные исходы равновероятны. Естественно считать, что $P(\omega) = \frac{1}{2^n}$ для каждого элементарного исхода. Функция P, определяемая равенством $P(A) = \frac{1}{2^n} card(A)$ является вероятностью на Ω.*

Пример 4. *(Биномиальное распределение). В ситуации примера 1 для каждого исхода ω, содержащего k гербов и $n-k$ решеток положим*

$$P(\{\omega\}) = p^k q^{n-k},$$

где p и q — фиксированные числа, удовлетворяющие условиям $0 < p < 1$, $p+q = 1$. Для того, чтобы проверить, что P действительно вероятность, достаточно показать, что $P(\Omega) = 1$. Действительно, положим $A_k = \{$выпало ровно k гербов$\}$. Заметим, что A_k содержит C_n^k элементов (неупорядоченная выборка k ячеек из n доступных). Тогда $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Следовательно $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^2 = 1$.

Теорема 1. *(Формула включений и исключений). Для двух событий A, B выполнено соотношение*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Более общим образом

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n).$$

Пример 5. *(Гипергеометрическое распределение) Задан набор из r цветов. В урне содержится $M = M_1+M_2+\cdots+M_r$ шаров, причем ровно M_i из них имеют i-й цвет. Случайным образом производится выборка (без возвращения) $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ шаров, $n_i \le M_i$. Найти вероятность того, что ровно n_i из них будут i-ого цвета. Ответ:*

$$\frac{C_{M_1}^{n_1} \cdot C_{M_2}^{n_2} \cdots C_{M_r}^{n_r}}{C_M^n}.$$

В следующем примере мы познакомимся с распределением на бесконечном множестве.

Пример 6. *(Распределение Пуассона). Для натурального n положим*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$0 \le k \le n$, (вероятность k успехов в биномиальном распределении). Нетрудно видеть, что при $n \to \infty$ и $np \to \lambda$

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Распределение на множестве целых неотрицательных чисел, заданное формулой $P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ называется распределением Пуассона с параметром λ (нетрудно видеть, что это действительно вероятностное распределение).

Упражнение 1. *Вероятность брака некоторого изделия равна $0,002$. Найти приближенно вероятность того, что в партии из 1000 изделий не больше двух бракованных.*

Пример 7. *(Случайное блуждание) Частица перемещается по прямой на шаг длины 1 с вероятностью p вправо или с вероятностью $q = 1 - p$ влево независимо от движения на предыдущих шагах. Пусть X — смещение частицы за n шагов. Тогда $\frac{X+n}{2}$ распределено биномиально, т.е. $P(\frac{X+n}{2} = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.*

Занятие 1

1) Доказать следующие свойства операций над событиями $A\Delta B = (AB^c)^c\Delta(A^cB)^c$, $(A\Delta B)^c = AB\cup A^cB^c$

$$\cup_{i=1}^n \cap_{k=i}^n A_k = \cap_{i=1}^n \cup_{k=i}^n A_k$$

2) Представить объединение событий $A_1,\cdots,A_n$ в виде объединения n непересекающихся событий.

3) Пусть $A_1, A_2,\cdots,A_n\cdots$ — бесконечная последовательность событий. Записать в виде формул события

$$B = \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n \text{ для бесконечного числа событий } A_n\ \}$$

$$C = \{\omega\in\Omega : \omega\in A_n \text{ для всех событий } A_n \text{ за исключением, м. б., конечного числа }\}$$

4) Доказать неравенства

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n)$$

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) \ge P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - (n-1)$$

6) Доказать формулу

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n).$$

7) Десять процентов сферы закрашено в черный свет, остальное — в белый. Доказать, что в сферу можно вписать куб таким образом, что все вершины будут белыми.

8) Найти вероятность того, что в группе из n человек хотя бы у двоих совпадают дни рождения.

9) 40 шахматистов разбиваются на 4 равные команды. Найти вероятность, что четверо сильнейших окажутся в разных группах.

10) Брошено 6 игральных костей. Найти вероятности событий 1) на всех костях выпало одинаковое число очков, 2) на всех костях выпало разное число очков, 3) сумма выпавших очков равна 7.

11) Найти вероятность того, что в перестановке из первых n натуральных чисел ни один элемент не стоит на своем месте.

12) $n+2$ шара размещаются по n ящикам. Найти вероятность того, что по крайней мере один ящик будет пустым.

13) $n+1$ шара размещаются по n ящикам. Найти вероятность того, что ровно два ящика будут пустыми.

14) (Геометрическое распределение) Игроки A, B подбрасывают кость (в порядке AB...). Тот, у кого выпало 6, выбывает. Найти вероятность того, что произведено n бросаний.

15) Игроки A, B, C подбрасывают кость (в порядке ABC...). Тот, у кого выпало 6, выбывает. Найти вероятность того, что A — 1) первый, 2) второй по счету выбывший.

16) (Закон Мэрфи) Монета подбрасывается бесконечное число раз. Доказать, что любая заданная последовательность длины n встретится с вероятностью 1.

17) В каждой пачке с некоторым товаром содержится одно из r опасных веществ (с одинаковой вероятностью). Найти вероятность собрать все опасные вещества при покупке $n > r$ пачек.