Гомологическая Алгебра – 1

Источники: Бурбаки; Гельфанд, Манин; Картан, Эйленберг; Маклейн; Weibel (An introduction to homol. algebra)

Примеры приложений

① Число Эйлера для платоновых тел

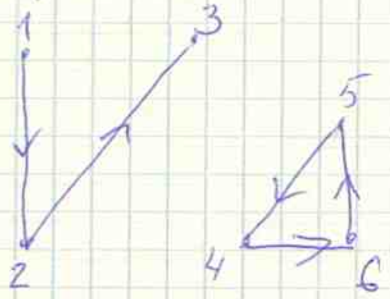
	вершин	ребер	граней	В−Р+Г
Тетраэдр	4	6	4	2
Куб	8	12	6	2
Октаэдр	6	12	8	2
Икосаэдр	12	30	20	2
Додекаэдр	20	30	12	2

② Векторные пр-ва над $\mathbb{R}$ (конечном.) со структурой ассоц. алгебры с делением: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. И больше не бывает.

Оба утверждения можно доказать при помощи гомологической алгебры.

Примеры комплексов

① Гомологии графов. Пусть задан граф с выбранной нумерацией вершин и ориентацией ребер



$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\partial} & K_0 \\ \| & & \| \\ \bigoplus\limits_{i\to j} \mathbb{Z} e_{ij} & & \bigoplus\limits_{i} \mathbb{Z} e_i \end{array}$$

$$\partial(e_{ij}) = e_j - e_i$$

<u>Упражнение</u> описать $\mathrm{Ker}(\partial)$ и $\mathrm{Coker}(\partial) = K_0/\partial(K_1)$

2 Поверхность с триангуляцией (выбрана нумерация вершин, ориентация на ребрах и треугольниках)

$K_2 = \bigoplus \mathbb{Z}\, e_{ijk}$

$\partial_2(e_{ijk})$ = сумма ребер с учетом ориентаций.

$\partial_2(e_{ijk}) = -e_{ji} - e_{kj} + e_{ki}$

$\partial_2 \circ \partial_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\partial_1 \subset \mathrm{Ker}\,\partial_2$ (проверить!)

<u>Упражнение</u> для сферы (например с триангуляцией тетраэдра) $\mathrm{Ker}\,\partial_2 \simeq \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\,\partial_2 = \mathrm{Ker}\,\partial_1$, $K_0/\mathrm{Im}\,\partial_1 \simeq \mathbb{Z}$

<u>Замечание</u> для тора $\mathrm{Ker}\,\partial_1 \neq \mathrm{Im}\,\partial_2$

<u>Пример</u> для знакомых с дифференциальной геометрией. Дифференциал d: (k-формы) $\to$ (($k+1$) формы) удовлетворяет $d \circ d = 0$ (хотя и повышает степень, не понижает).

<u>Определение</u> (Цепной) комплекс абелевых групп это семейство абелевых групп $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и гомоморфизмов $d_n : C_n \to C_{n-1}$, таких что $0 = d \circ d : C_n \to C_{n-2}$

<u>Лемма</u> $\mathrm{Ker}\, d_{n-1} \supset \mathrm{Im}\, d_n$

<u>Определение</u> $Z_n(C) = \ker d_n$

$B_n(C) = \mathrm{Im}\, d_{n+1}$

$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$

Пример $C_n = \mathbb{Z}/8$ $n \geq 0$ ($C_n = 0$ для $n < 0$)
$d_n(x) = 4x$

Определение Морфизм комплексов $C_\bullet \to D_\bullet$ это последовательность гомоморфизмов $u_n: C_n \to D_n$, таких что
$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[d] \\ D_n \arrow[r] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$
коммутативная диаграмма для любого n.

Лемма Морфизм комплексов индуцирует гомоморфизмы групп
$$Z_n(C) \to Z_n(D)$$
$$B_n(C) \to B_n(D)$$
$$H_n(C) \to H_n(D)$$

Пример пусть $\{B_n, H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ векторные пространства над полем, $C_n = B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1}$ и d_n естественная композиция проекции на B_{n-1} и вложения в C_{n-1}

Факт любой комплекс векторных пространств (скажем, конечной размерности) изоморфен такому.

Следствие поскольку в этом случае $H_n(C) = H_n$, то
$$\sum (-1)^i \dim C_i = \sum (-1)^i \dim H_i$$

Предупреждение это неверно для абелевых групп
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$$

Определение $u_\bullet: C_\bullet \to D_\bullet$ называется квазиизоморфизмом если индуцированное отображение $H_n(C) \to H_n(D)$ есть изоморфизм для всех n.

Определение Коцепной комплекс, это последовательность абелевых групп $\{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и гомоморфизмов $d_n : C^n \to C^{n+1}$, таких что $d_{n+1} \circ d_n = 0$ для всех n. Легко дать определения когомологий, морфизмов коцепных комплексов

Еще примеры

① модуль $k = k[x,y]/(x,y)$ над кольцом $A = k[x,y]$

$$A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow k$$

$$f \longmapsto yf \oplus (-xf)$$

$$g \oplus h \longmapsto xg + yh$$

② бар-резольвента

A - алгебра над полем k

$$B_i = \underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{i+2}$$

$$\ldots \to B_2 \to B_1 \to B_0 \to A$$

$$a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$$

$$d_i(a_0 \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k a_0 \otimes \ldots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \ldots \otimes a_{i+1}$$

Гомологическая Алгебра – 2

Как доказывать, что у комплекса тривиальные (ко)гомологии? В некоторых случаях полезно понятие гомотопии между двумя отображениями.

Будем работать с коцепными комплексами.

Определение

① $Hom^k(C^\cdot, D^\cdot) = \prod_n Hom(C^n, D^{n+k})$

② если $\varphi_1, \varphi_2 : C^\cdot \to D^\cdot$ два морфизма комплексов то гомотопией между φ_1 и φ_2 называется $h \in Hom^{-1}(C^\cdot, D^\cdot)$ такое что $\varphi_1 - \varphi_2 = d_D \circ h + h \circ d_C$

Обозначение $\varphi_1 \sim \varphi_2$ если существует гомотопия между φ_1 и φ_2

Лемма гомотопные морфизмы индуцируют одинаковые отображения на когомологиях.

Следствие если тождественное и нулевое отображения $C^\cdot \to C^\cdot$ гомотопны то $H^n(C) = 0$

Это можно проверить и непосредственно: мы требуем $x = d(h(x)) + h(d(x)) \quad \forall x \in C^n, \forall n \in \mathbb{Z}$

поэтому $d(x) = 0$ сразу даёт $x \in \operatorname{Im} d$

Пример для бар-резольвенты

$h(a_0 \otimes \dots \otimes a_i) = 1 \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_i$

Вариант A – алгебра над полем k (с единицей)

M – модуль над A. Существует бар-резольвента

$\to A \otimes A \otimes A \otimes M \to A \otimes A \otimes M \to A \otimes M \to M \to 0$

и можно написать такую же гомотопию

Другая точка зрения

по двум комплексам $C^\cdot$ и $D^\cdot$ можно построить комплекс $Hom^\cdot(C,D)$ с дифференциалами

$$d_{Hom}: Hom^k(C,D) \to Hom^{k+1}(C,D)$$
$$\varphi \longmapsto d_D \circ \varphi - (-1)^k \varphi \circ d_C$$

Упражнение

$$\varphi \in Hom^0(C,D)$$

$d_{Hom}(\varphi) = 0 \iff \varphi$ есть морфизм комплексов

$\varphi = d_{Hom}(h) \iff h$ есть гомотопия между φ и 0

Пример в том случае когда

$C^n = B^n \oplus H^n \oplus B^{n+1}$ с естественными

дифференциалами, есть и гомотопия

$$h: C^n = B^n \oplus H^n \oplus B^{n+1} \to B^{n-1} \oplus H^{n-1} \oplus B^n = C^{n-1}$$

Какая?

Точные тройки групп и ~~точных~~ комплексов

Определение точной тройкой групп $0 \to A \to B \to C \to 0$ называется комплекс абелевых групп с тривиальными когомологиями, то есть $B \to C$ сюръективно и A – ядро этой сюръекции (а $A \to B$ его каноническое вложение в B). Точной тройкой комплексов $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ называется пара морфизмов $u: A^\cdot \to B^\cdot$, $v: B^\cdot \to C^\cdot$, индуцирующая точную тройку абелевых групп $0 \to A^n \to B^n \to C^n \to 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$

Точные тройки комплексов можно использовать для вычисления когомологий благодаря след. результату

Теорема Пусть $0 \to A^{\cdot} \xrightarrow{u} B^{\cdot} \xrightarrow{v} C^{\cdot} \to 0$ точная тройка комплексов. Тогда существует точная последовательность их когомологий

$$\ldots \to H^{n-1}(C) \to H^n(A) \to H^n(B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(B) \to H^{n+1}(C) \to \ldots$$

План доказательства

- отображения $H^n(A) \to H^n(B)$ и $H^n(B) \to H^n(C)$ ясна. ясно так же, что их композиция равна нулю.
- пусть $\alpha \in H^n(C)$ представляет элемент $\bar{\alpha} \in C^n$ с $d_C(\bar{\alpha}) = 0$. Найдем $\bar{\beta} \in B^n$ такой что $v(\bar{\beta}) = \bar{\alpha}$. Мы не можем сказать, что $d_B(\bar{\beta}) = 0$ но $v d_B(\bar{\beta}) = 0$ и потому $d_B(\bar{\beta}) \in A^{n+1} \subset B^{n+1}$. Поскольку $d_A(d_B(\bar{\beta})) = 0$, элемент $\bar{\gamma} = d_B(\bar{\beta})$ дает некоторый класс когомологий $\gamma \in H^{n+1}(A)$
- надо доказать, что γ не зависит от выбора $\bar{\alpha}$ (для фиксированного α) и от выбора $\bar{\beta}$ (при фиксированном $\bar{\alpha}$)
- дальше надо проверить, что композиции

  $H^n(B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ и

  $H^n(C) \to H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(B)$ равны нулю
- наконец нужно проверить точность во всех трех случаях ($H^n(B)$, $H^n(C)$, $H^n(A)$)

Следствие: если $A^{\cdot}$ точен ($H^n(A) = 0$) то $B^{\cdot}$ и $C^{\cdot}$ имеют одинаковые когомологии. Если $C^{\cdot}$ точен, то $A^{\cdot}$ и $B^{\cdot}$ имеют одинаковые когомологии.

Пример Комплекс Кошуля (Козюля) (4)

V векторное пространство с базисом $x_1 \ldots x_n$

V^* двойственное с двойственным базисом $y_1 \ldots y_n$

$A = \mathrm{Sym}^\bullet(V) = k[x_1 \ldots x_n]$

$$\Lambda^n V \otimes A \longrightarrow \Lambda^{n-1} V \otimes A \to \ldots \qquad \to \Lambda^2 V \otimes A \to V \otimes A \to A$$

дифференциал задается выражением $\sum y_i \otimes x_i$

где $y \in V^*$ задает $\Lambda^k V \to \Lambda^{k-1} V$.

Или

$$(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}) \cdot f(x) \longmapsto \sum_{t=1}^{k} (-1)^t (x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{x_{i_t}} \wedge \ldots \wedge x_{i_k})\, x_{i_t} f(x)$$

$n = 2$

$$(x_1 \wedge x_2) \cdot k[x_1, x_2] \longrightarrow (x_1)\, k[x_1, x_2] \oplus (x_2)\, k[x_1, x_2] \to k[x_1, x_2]$$

K_n – комплекс. Докажем, что $H_0(K) = k$, а остальных гомологий нет. Пусть A = подкомплекс элементов, не зависящих от x_n во внешнем произведении, i.e. $A = \Lambda^*(x_1, \ldots, x_{n-1}) \otimes k[x_1, \ldots, x_n]$

$B = K_n$

$C = (x_n) \wedge A$ ← сдвиг градуировки на 1!

по индукции получим

$$0 \to H_1(B) \to H_1(C) \to H_0(A) \to H_0(B) \to 0$$

$$0 \to H_1(B) \to (x_n) \cdot k[x_n] \to k[x_n] \to H_0(B) \to 0$$

$$x_n \cdot f \longmapsto x_n f$$

поэтому $H_1(B) = 0$

$H_0(B) = k$.