Еще раз о матрицах второго порядка с определителем единица

16.1. Пусть A – такая матрица. Докажите, что если

а) $\mathrm{tr}^2 A < 4$, то A сопряжена матрице $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{tr}^2 A = 4$, то A сопряжена матрице $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\mathrm{tr}^2 A > 4$, то A сопряжена матрице гиперболического поворота $\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, t & \mathrm{sh}\, t \\ \mathrm{sh}\, t & \mathrm{ch}\, t \end{pmatrix}$.

Менее известная модель

Рассмотрим на евклидовой плоскости множество E всех эллипсов площади 1 с центром в точке 0. Если $e \in E$, то $|\overrightarrow{v}|_e = \{$расстояние от точки 0 до точки пересечения прямой $\{t\overrightarrow{v}\}$ с эллипсом $e\}$, $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Положим $d(e_1, e_2) = \left| \ln \max\limits_{v \neq 0} \dfrac{|v|_{e_1}}{|v|_{e_2}} \right|$.

16.2. Найдите расстояние между эллипсами $\dfrac{3}{4}x^2 + xy + y^2 = 1$ и $\dfrac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$.

16.3. Докажите, что

а) (E, d) метрическое пространство.

б) (E, d) полное метрическое пространство.

в) E является двумерным многообразием.

16.4. На поверхности E естественно действует группа $SL(2, \mathbb{R})$ (как?). Докажите, что это действие транзитивно. (Совет: от эллипсов перейдите к квадратичным формам).

16.5. Рассмотрим отображение, которое каждому комплексному числу $z = r \cdot e^{\varphi}$, $r < 1$, из диска Пуанкаре ставит в соответствие эллипс $e \in E$ эллиптичности r, большая ось которого составляет угол $\varphi/2$ с вещественной осью (эллиптичность эллипса равна $r = \dfrac{a-b}{a+b}$, где $a \geqslant b$ – длины его осей).

Доказать, что построенная биекция (кстати, почему это биекция?) осуществляет изометрию (E, d) и $(\mathbb{D}, d_h)$.

16.6*. Что представляют из себя прямые в модели (E, d)?

16.7. Докажите, что преобразование Ломоносова модели Клейна (с метрикой Гильберта) в модельи Пуанкаре каждой точке $z = a + bi$ из единичного диска $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ ставит в соответствие то единственное решение квадратного уравнения $(1-a)z^2 + 2bz + (1+a) = 0$, которое лежит в верхней полуплоскости, осуществляет изометрию моделей (проследите, как при этом сгибаются геодезические!)

16.8. Докажите, что в гиперболической геометрии функция $f(x) = \mathrm{dist}(M, x)$, где M — фиксированная точка, а x — точка, пробегающая фиксированную прямую ℓ, $M \notin \ell$, является строго выпуклой (это же верно и для евклидовой геометрии).

Говорят, что геодезическое метрическое пространство обладает отрицательной (нулевой, положительной) кривизной, если для любого треугольника ABC его средняя линия меньше (равна, больше) половины основания.

16.9. Докажите, что сфера S^2 с естественной метрикой, индуцированной из E^3, евклидова плоскость E^2, гиперболическая плоскость H^2 суть пространства соответственно положительной, нулевой, отрицательной кривизны.