Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \subset \mathbb{C}$

Определение. *Гиперболической нормой* $|v|_h$ вектора v, приложенного в точке $z \in H^2$, назовем число $\dfrac{|v|_{евк}}{\operatorname{Im} z}$, где $|v|_{евк}$ — евклидова норма (или, если угодно, модуль комплексного числа v).

Гиперболическая длина $l(\gamma)$ кривой $t \mapsto \gamma(t)$ вычисляется по формуле $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(t)|_h dt$.

В дальнейшем речь будет идти о гиперболической норме, и индекс h мы писать не будем.

14.1. Пусть φ — движение гиперболической плоскости. Докажите, что $|d_z\varphi(v)| = |v|$ для любого вектора v, приложенного в точке $z \in H^2$.

Указание. Проверьте, что если $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, то $d_z\varphi(v) = \dfrac{v}{(cz+d)^2}$.

14.2. Пусть вектор v_1 приложен в точке z_1, а вектор v_2 — в точке z_2. Докажите, что если $|v_1| = |v_2|$, то существует движение φ, переводящее точку z_1 в z_2, дифференциал которого $d_{z_1}\varphi$ переводит вектор v_1 в вектор v_2.

14.3. Найдите гиперболическое расстояние между точками:

а) i и $5i$; **б)** i и $1+i$; **в)** $-1/2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ и i; **г)** $(1+i)$ и $2+2i$.

14.4. Докажите, что преобразование Кэли $C(z) = \dfrac{-z+i}{z+i}$ переводит верхнюю полуплоскость в единичный диск, сохраняя гиперболические нормы (напомним, что в диске $|v|_h = \dfrac{|v|_{евк}}{1-|z|^2}$).

14.5. Докажите, что отрезки равной длины можно совместить движением гиперболической плоскости.

14.6. Докажите, что на гиперболической плоскости через точку P проходит единственный перпендикуляр к прямой ℓ.

14.7. Постройте общий перпендикуляр к двум непересекающимся прямым на гиперболической плоскости.

14.8. Докажите три школьных признака равенства треугольников (по стороне и двум углам, трем сторонам, двум сторонам и углу между ними).

14.9. Докажите гиперболический признак равенства треугольников по трем углам.

14.10. Докажите, что гиперболическое расстояние между точками z, $z' \in H^2 \subset \mathbb{C}$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname{dist}(z, z') = \log \frac{|z - \overline{z}'| + |z - z'|}{|z - \overline{z}'| - |z - z'|}$$