# Решётки на плоскости и модулярная группа

**Обозначения.** $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ — комплексная проективная прямая; $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость (без границы).

**Определение.** Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. *Решёткой* называется множество векторов вида $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$, где $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.

**13.1.** Докажите, что два базиса в $\mathbb{R}^n$ задают одну и ту же решётку тогда и только тогда, когда матрица перехода от первого базиса ко второму принадлежит $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (т.е. её определитель равен $\pm 1$, а коэффициенты матрицы — целые числа), причём если эти базисы одинаково ориентированы, то матрица перехода принадлежит $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

**13.2.** Рассмотрим множество решёток на плоскости $\mathbb{R}^2$, отождествлённой с множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Назовём две решётки *конформно эквивалентными*, если одна из них переводится в другую умножением на некоторое ненулевое комплексное число.

**а)** Докажите, что любая решётка конформно эквивалентна некоторой решётке, порождённой 1 и $\omega$, где $\omega \in H$.

**б)** Докажите, что решётка, порождённая векторами $(1, \omega)$, эквивалентна решётке, порождённой векторами $(1, \omega')$, тогда и только тогда, когда существует матрица $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, что $\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$.

**13.3.** Пусть $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — некоторый элемент из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Определим отображение $g\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ по следующему правилу: $z \mapsto g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

**а)** Докажите, что это отображение взаимно-однозначно.

**б)** Докажите, что это *действие* группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

**в)** Докажите, что *ядро неэффективности* этого действия, т.е. множество таких $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, для которых соответствующее отображение $g\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ тождественно, есть $\{\pm E\}$, где через $E$ обозначена единичная матрица.

Указание. Вспомните листок 10.

**13.4.** Выразите $\operatorname{Im} g(z)$ через $\operatorname{Im} z$ и коэффициенты матрицы $g$. Выведите отсюда, что верхняя полуплоскость $H$ инвариантна относительно действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (а значит, и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).

Результат задачи 13.2б) можно интерпретировать так: множество решёток с точностью до конформной эквивалентности взаимно-однозначно соответствует множеству орбит группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, действующей на верхней полуплоскости. Исследуем это действие подробнее.

**Определение.** *Модулярной группой* называется группа $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ (эта группа также обозначается $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). *Модулярная область* — это множество точек $D = \{z \in H \mid |\operatorname{Re} z| \le \frac{1}{2}, |z| \ge 1\}$.

**13.5.** Рассмотрим матрицы $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нарисуйте область $D$ и её образы под действием элементов $S$, $T$, $T^{-1}$, $ST$, $TS$, $ST^{-1}$, $T^{-1}S$, $STS$.

**13.6.** Найдите порядки элементов $S$ и $ST$ группы $G$.

**13.7. а)** Докажите, что отображение $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ переводит верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга.

**б)** Нарисуйте области, в которые это отображение переведёт области из предыдущей задачи.

Обозначим через $G'$ подгруппу в $G$, порождённую элементами $S$ и $T$.

**13.8. а)** Пусть $z \in H$. Докажите, что множество $\{\operatorname{Im} g(z) \mid g \in G'\}$ ограничено сверху и содержит свою точную верхнюю грань.

**б)** Докажите, что для любого $z \in H$ найдётся такой элемент $g \in G'$, что $g(z) \in D$.

**13.9.** Пусть $z, z'$ — две различные точки из $D$, сравнимые по модулю группы $G$ (т.е. существует такой элемент $g \in G$, что $g(z) = z'$. Докажите, что тогда либо $\operatorname{Re} z = \pm 1/2$ и $z = z' \pm 1$, либо $|z| = 1$ и $z' = -1/z$.

**13.10. а)** Пусть $z \in D$, и $G_z = \{g \in G \mid g(z) = z\}$ — стабилизатор точки $z$ в группе $G$. Докажите, что если $z$ отлично от $i$, $e^{\pi i/3}$ и $e^{2\pi i/3}$, то $G_z = \{E\}$. (В частности, стабилизаторы всех *внутренних* точек области $D$ тривиальны).

**б)** Опишите стабилизаторы точек $i$, $e^{\pi i/3}$ и $e^{2\pi i/3}$ в группе $G$.

**13.11.** Докажите, что группа $G' = \langle S, T \rangle$ совпадает со всей группой $G$.

Указание. Пусть $g$ — произвольный элемент группы $G$. Используя задачи 13.8б) и 13.10а), докажите, что найдётся такой элемент $g' \in G'$, что $g'g = E$.

Итак, в задачах 13.8б), 13.10а) и 13.11 доказано, что область $D$ является *фундаментальной областью* для действия группы $G$ на $H$: всякая орбита группы $G$ пересекается с $D$, причём орбиты внутренних точек из $D$ пересекаются с $D$ ровно по одной точке.

**Мораль.** Пространство решёток в $\mathbb{R}^2$ с точностью до конформной эквивалентности — это модулярная область $D$, точки границы которой отождествлены описанным в задаче 13.9 образом.