Стереографическая проекция

Обозначения. Через S^2 обозначается двумерная сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

S — стереографическая проекция $S^2 - \{0, 0, 1\} \to \mathbb{C}$.

Плоскость $\{z = 0\} \cong \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ мы будем отождествлять с $\mathbb{C}$, положив $(u, v, 0) = u + iv$.

11.1. Проверьте, что $S(x, y, z) = \dfrac{x}{1-z} + i\dfrac{y}{1-z}$.

11.2. Покажите, что обратное отображение S^{-1} переводит $u + iv$ в точку

$$\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right),$$

а отображение $(z_1, z_2) \to z_1/z_2$ осуществляет биекцию $\mathbb{C}P^1 - \{(1, 0)\} \to \mathbb{C}$.

11.3. Пусть $F\colon (\mathbb{C}^2 - \{0\}) \to \mathbb{R}^3$ – отображение, заданное формулой

$$F(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2}{i(|z_1|^2 + |z_2|^2)}, \frac{z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2}\right).$$

Докажите, что F – это биекция между $\mathbb{C}P^1$ и сферой S^2 в $\mathbb{R}^3$.

11.4. Проверьте, что $S\big(F(z_1, z_2)\big) = z_1/z_2$, если $(z_1, z_2) \neq (1, 0)$.

11.5. Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности на сфере в окружности на $\mathbb{C}P^1$.

11.6. Докажите, что стереографическая проекция является конформным преобразованием, то есть сохраняет углы (начните с углов между окружностями).

Проективные преобразования (проективной плоскости)

Определение. *Гомология* — это проективное преобразование $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, которое оставляет инвариантными все прямые, проходящие через заданную точку O и все точки заданной проективной гиперплоскости L.

11.7. Найдите жорданову форму линейного преобразования $\varphi\colon V \to V$, соответствующего гомологии $\widehat{\varphi}$. Разберите два случая: **а)** $O \notin L$; **б)** $O \in L$.

11.8. Верно ли, что любое проективное преобразование $\mathbb{C}P^2$ порядка 2 является гомологией? Тот же вопрос для преобразования порядка $n > 2$.

11.9. Докажите, что любое проективное преобразование плоскости, множество неподвижных точек которого есть прямая, является гомологией.

11.10. Пусть ℓ — проективная прямая, $x, y \in \ell$ — её различные точки. Докажите, что существует единственная гомология $\varphi_{x,y}\colon \ell \to \ell$ порядка 2 с множеством неподвижных точек $\{x, y\}$.

11.11. Докажите, что группа $\mathrm{Aut}\mathbb{C}P^2$ порождена гомологиями.

11.12. Докажите, что если $\varphi_{x,y}$ меняет местами s и t, то $\varphi_{s,t}$ меняет местами x и y. (В таком случае четверка точек (x, s, y, t) называется *гармонической*.)