Поверхности второго порядка

7.1. Докажите, что в сечении любой поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка.

7.2. **а)** Докажите, что через каждую точку гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ проходят в точности две прямые, целиком лежащие на этой поверхности.

б) Докажите, что все прямые на поверхности гиперболоида можно разбить на два класса так, что любые две прямые из разных классов пересекаются, а из одного – скрещиваются.

7.3. Докажите то же утверждение, что в предыдущей задаче, для параболоида $z = x^2 - y^2$.

7.4. Определите вид следующих поверхностей второго порядка:
а) $xy + yz + zx = 1$; **б)** $xy + yz + zx = 0$; **в)** $xy + yz + zx = x + y + z$; **г)** $x - yz = 5$.

7.5. Найдите пару прямых, проходящих через точку $(0, 0, 0)$ и принадлежащих параболоиду $4x^2 - 5y^2 = z$.

7.6. Найдите пару прямых, проходящих через точку $(2, 2, \sqrt{3})$ и принадлежащих гиперболоиду $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

7.7. Пусть ℓ_1: $\{x = 0, y = 1\}$, ℓ_2: $\{y = 0, z = 1\}$, ℓ_3: $\{z = 0, x = 1\}$ – три попарно скрещивающиеся прямые. Какую поверхность в пространстве «заметают» все прямые, которые пересекают каждую из данных прямых (написать её уравнение)? Тот же вопрос для прямых ℓ_1: $\{y = 0, z = 1\}$, ℓ_2: $\{x = 0, z = 2\}$, ℓ_3: $\{x = y, z = 0\}$.

7.8. Найдите уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x - 1 = y = z$ вокруг оси $0z$.

7.9. Докажите, что любой эллипсоид допускает круговое сечение плоскостью, проходящей через его центр симметрии.

7.10. Докажите, что всякое сечение эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости кругового сечения из предыдущей задачи, также является круговым.

7.11. Из некоторой точки вне эллипсоида проводятся всевозможные касательные к нему. Докажите, что все точки касания лежат в одной плоскости. Верно ли это утверждение для однополостного гиперболоида? Для любой поверхности второго порядка?

7.12. Даны два софокусных эллипса $Э_1 \subset Э_2$. Лучик света, выпущенный из точки P (лежащей между эллипсами), коснувшись эллипса $Э_1$, начинает свое путешествие внутри $Э_2$ по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что все прямолинейные участки его траектории касаются эллипса $Э_1$. Верно ли обратное утверждение о том, что траектория солнечного зайчика в $Э_2$ касается некоторого софокусного эллипса, при условии, что она не пересекает фокусы эллипса?

7.13. . В пространстве расположены четыре прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4, любые две из которых скрещиваются. Обозначим через $m(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ число прямых в пространстве, пересекающих эти четыре прямые. Какие значения может принимать функция $m(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$?

7.14. Что мы увидим, если спроектируем параболоид $x^2 - y^2 = z$ на плоскость $z = 0$ из точки $(0, 0, 1)$? Что можно сказать о проекциях его прямолинейных образующих?