Группы отражений и калейдоскопы

Терминология. Пусть s — отражение на плоскости или в пространстве. Множество его неподвижных точек будем называть *зеркалом*.

6.1. Пусть s — отражение (на плоскости или в пространстве), w — такой вектор, для которого $s \cdot w = -w$. Докажите, что для любого вектора v

$$s \cdot v = v - 2\frac{(v,w)}{(w,w)}w.$$

Калейдоскопы на плоскости

6.2. Пусть s_α и s_β — два отражения с зеркалами ℓ_α и ℓ_β, угол между которыми равен θ. Покажите, что $s_\beta s_\alpha$ есть поворот вокруг точки пересечения этих прямых. Чему равен угол поворота?

6.3. Рассмотрим *группу*, порождённую этими отражениями (т.е. множество всех преобразований плоскости, получаемых при помощи композиции из s_α, s_β и обратных к ним). Докажите, что если θ не является рациональным кратным π, то эта группа бесконечна.

6.4. В обозначениях предыдущей задачи, пусть $\theta = \frac{\pi k}{m}$, где k и m — взаимно простые целые числа. Обозначим группу, порождённую s_α и s_β, через Γ_m.

а) Докажите, что $(s_\beta s_\alpha)^m = \mathrm{Id}$, причём m — минимальное число, для которого это равенство имеет место.

б) Докажите, что Γ_m есть в точности группа всех движений плоскости, сохраняющих правильный m-угольник. Найдите число элементов в этой группе (она называется *группой диэдра*). Убедитесь, что ответ зависит только от m, но не от k.

в) Опишите все элементы группы Γ_m. Сколько из них сохраняют ориентацию, а сколько меняют?

6.5. Пусть G — произвольная группа преобразований плоскости или пространства[1]. Назовём её элементы g и g' *сопряжёнными*, если существует такой элемент $h \in G$, для которого $g = hg'h^{-1}$ (или, что то же самое, $gh = hg'$). Проверьте, что сопряжённость есть отношение эквивалентности (т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

Таким образом, группа разбивается на *классы эквивалентности* — множества, в каждом из которых любые два элемента сопряжены друг другу.

6.6. Опишите классы сопряжённости в группе диэдра Γ_m (разберите отдельно случаи чётного и нечётного m).

Калейдоскопы. Рассмотрим плоский угол C — часть плоскости, ограниченную двумя лучами. Через C^0 обозначим его внутренность.

6.7. Рассмотрим группу Γ, порождённую отражениями относительно прямых, содержащих стороны угла. Каждое преобразование $g \in \Gamma$ переводит область C^0 в некоторую другую область $g \cdot C^0$.

а) Предположим, что никакая из получившихся областей $g \cdot C^0$ не пересекается с C^0 (из этого следует, что никакие две из получившихся областей не пересекаются — почему?). Чему может равняться угол C? Чему будет равна группа Γ?

б) Докажите, что $\bigcup_{g\in\Gamma} g \cdot C = \mathbb{R}^2$ (т.е. области, полученные из C, образуют *замощение* всей плоскости).

[1] Или абстрактная группа, если эти слова Вас не пугают.

Терминология. Если $g \cdot C$ образуют замощение всей плоскости, и при этом их внутренности не пересекаются, то это замощение называется *калейдоскопом.* Сами области $g \cdot C$ при этом обычно называются *камерами Вейля.*

6.8. *Решёткой* называется множество векторов вида $av + bw$, где v, w — некоторые фиксированные линейно независимые векторы, а $a, b \in \mathbb{Z}$. Докажите, что группа Γ_m сохраняет некоторую решётку тогда и только тогда, когда $m = 3, 4$ или 6. Нарисуйте эти решётки.

Калейдоскопы в пространстве

Теперь зафиксируем в пространстве трёхгранный конус C с внутренностью C^0 и рассмотрим группу Γ, порождённую тремя отражениями относительно плоскостей его граней. Несложно получить следующее необходимое условие:

6.9. Если никакой из открытых конусов $g \cdot C^0$, где $g \in \Gamma$, не пересекается с C^0, то все три двугранные угла конуса C являются целыми частями π (т.е. имеют вид π/k).

Определение. Конус, все двугранные углы которого имеют вид π/k_i, называется *конусом Кокстера.*

6.10. а) Найдите все тройки (k, l, m), для которых существует трёхгранный конус Кокстера с углами π/k, π/l и π/m.

б) Докажите, что всякий конус Кокстера является трёхгранным.

Указание. Вспомните оценку на сумму двугранных углов m-гранного конуса.

В задаче 6.9 приведено *необходимое* условие для того, чтобы конусу Кокстера соответствовал калейдоскоп. Можно доказать, что оно же является и достаточным: т.е. для любого конуса Кокстера объединение всех конусов $g \cdot C$ равняется всему пространству $\mathbb{R}^3$, причём внутренности этих конусов не пересекаются. Это можно сделать двумя способами: либо явно построить для каждого конуса Кокстера разбиение $\mathbb{R}^3$ на равные ему камеры Вейля, либо доказать это «концептуально»[2]

6.11*. Докажите, что всякому конусу Кокстера соответствует калейдоскоп. (Воспользуйтесь явным видом конусов Кокстера, либо разберите доказательство из указанной статьи, либо придумайте своё.)

[2]Последнее, впрочем, не очень просто. Доказательство этого факта можно прочитать, например, в статье Э. Б. Винберга «Калейдоскопы и группы отражений» (Математическое Просвещение №7 (2003), с. 45–63).