Эллипс, гипербола, парабола

Эллипс — это аффинный образ окружности $x^2 + y^2 = 1$, гипербола — аффинный образ кривой $y = \frac{1}{x}$, а парабола — кривой $y = x^2$.

5.1. Касательные к эллипсу в точках P и Q пересекаются в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через центр эллипса и точку M, делит хорду PQ пополам.

5.2. Докажите, что прямые, соединяющие точку M на гиперболе с двумя её фиксированными точками A и B, отсекают на асимптоте гиперболы равные отрезки.

5.3. Докажите, что к параболе нельзя провести две параллельные касательные.

5.4. Четырехугольник $ABCD$ описан около эллипса с центром O. Докажите, что $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{ODA} + S_{OBC}$.

5.5. Докажите, что отрезки секущей гиперболы, заключенные между этой гиперболой и её асимптотами, равны между собой.

В последующих задачах нужно использовать метрическое определение эллипса, гиперболы, параболы, характеризующее их как Г.М.Т. (см. любой учебник по аналитической геометрии)

5.6. Докажите оптическое свойство эллипса: любая его касательная образует равные углы с фокальными радиусами, проведенными из точки касания.

5.7. Сформулируйте и докажите оптическое свойство гиперболы и параболы.

5.8. Докажите, что если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадает на директрису, и при этом получившаяся точка будет проекцией точки касания на директрису.

5.9. Докажите, что директриса параболы — это Г.М.Т., из которых парабола видна под прямым углом.

5.10. Пусть A и B — произвольные точки эллипса (гиперболы или параболы), причем его фокус F лежит на отрезке AB. Докажите, что число $\frac{|FA||FB|}{|AB|}$ не зависит от выбора точек A и B.

5.11. Рассмотрим эллипс с фокусами F_1 и F_2. Проведем две касательные к эллипсу в точках X и Y. Пусть они пересекаются в точке Z. Докажите, что угол F_1ZX равен углу F_2ZY.

5.12. Докажите, что софокусные гипербола и эллипс пересекаются под прямым углом.

5.13. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей.

5.14. С помощью параллельного переноса системы координат приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и укажите формулы перехода от исходной системы координат к канонической:

а) $x^2 + 2y^2 - 4x + 8y = 0$;
б) $3x^2 - y^2 - 6x + 8y - 29 = 0$;
в) $2x^2 + 4x - 2y + 7 = 0$.

5.15. С помощью поворота и параллельного переноса приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

а) $xy - 3\sqrt{2}x - 8 = 0$;
б) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5y = 0$;
в) $2x^2 + 10xy + 2y^2 - \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 1 = 0$;
г) $x^2 + 8xy + 16y^2 + x + 4y - 16\dfrac{3}{4} = 0$.

5.16. Найдите каноническое уравнение кривой второго порядка, если дано ее полярное уравнение:

а) $\rho = \dfrac{3}{2 - 2\cos\varphi}$; **б)** $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}$; **в)** $\rho = \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$.