Аффинные координаты на плоскости и в пространстве

1.1. Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямой, проходящей через вершину угла, его можно разрезать на два равнобедренных треугольника.

1.2. К двум внешне касающимся окружностям O_R и O_r радиусов R и r проведена общая внешняя касательная l. Найдите радиус окружности, касающейся O_R, O_r и l.

1.3. Докажите, что правильную треугольную пирамиду со стороной основания a и боковым ребром b можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат. Найти сторону этого квадрата.

1.4. Три одинаковых шара радиуса R касаются друг друга и некоторой плоскости. Четвертый шар касается этих трех и той же плоскости. Найдите радиус четвертого шара.

1.5. Дан параллелограмм $ABCD$, M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Напишите матрицу перехода от базиса $\{AM, AP\}$ к базису $\{NP, NQ\}$. Найти координаты вектора AC в первом и втором базисе.

1.6. Пусть A, B, C — вершины невырожденного треугольника. Как связаны координаты точки в аффинных системах координат (A, AB, AC) и (B, BA, BC)?

1.7. В задаче 5 напишите уравнение диагонали BD в системе координат (O, NP, NQ), где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

1.8. В фиксированной аффинной системе координат найдите уравнение прямой,
- **а)** заданной точкой с координатами $(-1, -3)$ и вектором с координатами $(2, 1)$;
- **б)** заданной точкой $(-1, -3, 2)$ и вектором $(2, 1, 4)$;
- **в)** проходящей через точки $(3, -6, 2)$, $(4, 2, -1)$;
- **г)** проходящей через точку $(2, 5)$ параллельно прямой $2x + y - 3 = 0$;
- **д)** по которой пересекаются плоскости $x - y + 3z - 3 = 0$, $2x - y + z - 5 = 0$.

1.9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три точки $(t_i, {t_i}^2, {t_i}^3)$, $i = 1, 2, 3$, где $t_i \neq t_j, i \neq j$.

1.10. Напишите систему линейных неравенств, определяющих внутренность треугольника с вершинами $(2, 1)$, $(2, -5)$, $(-4, -1)$.

1.11. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

1.12. Опишите все взаимно-однозначные отображения евклидовой прямой, которые сохраняют расстояние между точками.

1.13. Доказать, что любое движение евклидовой плоскости есть либо параллельный перенос, либо поворот вокруг точки на какой-то угол, либо скользящее отражение.

1.14. Зададим на плоскости $\mathbb{R}^2$ расстояние между точками $M = (x_1, y_1)$ и $N = (x_2, y_2)$ по формуле $d(M, N) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.
- **а)** Как выглядят в этой геометрии прямые?
- **б)** Нарисуйте на этой плоскости окружности.
- **в)** Опишите все движения плоскости $(\mathbb{R}^2, d)$.