Многочлены и расширения полей.

A15◇1. Покажите, что для любого отличного от константы многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ существует бесконечно много простых $p \in \mathbb{N}$, таких что f имеет корень в $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

A15◇2. Выпишите все неприводимые многочлены степени **а)** $\leqslant 4$ в $\mathbb{F}_2[x]$ **б)** 2 в $\mathbb{F}_3[x]$ и найдите число неприводимых многочленов степени **в)** 5 в $\mathbb{F}_2[x]$ **г)** $\leqslant 4$ в $\mathbb{F}_3[x]$ **д)** $\leqslant 3$ в $\mathbb{F}_9[x]$.

A15◇3. Обозначим через I_d число неприводимых многочленов степени d в $\mathbb{F}_q[x]$. Докажите, что $1 - qt = \prod\limits_{d\geqslant 1}(1-t^d)^{I_d}$ в $\mathbb{Z}[[t]]$.

A15◇4. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое, и $a \in \mathbb{F}_p^*$. Покажите, что многочлен $x^p - x - a$ неприводим **а)** в $\mathbb{F}_p[x]$ всегда, а **б)** в $\mathbb{F}_{p^n}[x]$ тогда и только тогда, когда $p \nmid n$.

A15◇5. Докажите неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочлена **а)** $x^5 - 12\,x^3 + 36\,x - 12$ **б)** $x^{105} - 9$ **в)** $x^4 - 8\,x^3 + 12\,x^2 - 6\,x + 2$ **г)** $x^n - x + 1$ **д)** $x^n + x + 1$ при $n \not\equiv 2 \pmod 3$ **е)** $\prod(x-\alpha_i) - 1$ **ж)** $\prod(x-\alpha_i)^2 + 1$ (в (е) и (ж) все $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ различны)

A15◇6. Найдите минимальный многочлен числа **а)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$ **б)** $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

A15◇7. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$ с полем **а)** $\mathbb{Q}(-1+\sqrt{-2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}+\sqrt{2})$?

A15◇8. Какова степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена **а)** $x^4 - 2$ **б)** $x^p - a$ ([1]).

A15◇9. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2,3$ и $f(x) = x^3 + px + q \in \Bbbk[x]$ неприводим с дискриминантом D. Покажите, что поле разложения f имеет над $\Bbbk$ степень **а)** 3, если $D \in \Bbbk^2$ **б)** 6, если $D \notin \Bbbk^2$.

A15◇10. Пусть группа $G \subset \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ порождается преобразованиями $x \mapsto x^{-1}$ и $x \mapsto (1-x)$ и действует на поле рациональных функций $\Bbbk(x)$ соответствующими заменами координат.
  а) Найдите $|G|$ и опишите все орбиты длины $< |G|$ на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\Bbbk)$.
  б) Постройте ненулевую G-инвариантную функцию $f \in \Bbbk(x)$, такую что $\Bbbk(f) = \Bbbk(x)^G$ совпадает с подполем G-инвариантов.

A15◇11. Группа диэдра D_n действует на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на $\mathbb{C}(x)$ так, что поворот на угол $2\pi/n$ заменяет координату по правилу $x \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}}x$, а отражение относительно одной из осей, проходящих через вершину — по правилу $x \mapsto x^{-1}$. Найдите все орбиты длины $< 2n$ на $\mathbb{P}_1$ и опишите подполе инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}$.

A15◇12. Найдите поле инвариантов $\mathbb{C}(x_1, x_2, \dots, x_n)^G$, где группа G состоит из **а)** всех **б)** циклических перестановок переменных x_i **в)** порождена заменами $x_k \mapsto e^{\frac{2\pi k i}{n}}x_k$.

A15◇13. Верно ли, что **а)** $\cos 36° \in \mathbb{Q}(\sin 36°)$ **б)** $\sin 36° \in \mathbb{Q}(\cos 36°)$?

A15◇14. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = p > 0$ и буквы x, y алгебраически независимы над $\Bbbk$.
  а) Вычислите степень расширения $\Bbbk(x,y) \supset \Bbbk(x^p,y^p)$.
  б) Конечно ли множество промежуточных подполей $\mathbb{F}\colon \Bbbk(x^p,y^p) \subset \mathbb{F} \subset \Bbbk(x,y)$?

A15◇15. Пусть A — нётерово нормальное кольцо с полем частных K, $L \supset K$ — конечное сепарабельное[2] расширение, и $B \supset A$ — целое замыкание[3] A в L. Верно ли, что B конечно порождено как A-модуль?

Норма и след. Хар. многочлен, след и определитель оператора умножения $K \xrightarrow{x\mapsto\vartheta\cdot x} K$ на элемент $\vartheta \in K$, лежащий в конечном расширении $K \supset \Bbbk$ поля $\Bbbk$, называются хар. многочленом, следом и нормой ϑ (над $\Bbbk$) и обозначаются $\chi_{K/\Bbbk}(\vartheta;x) \in \Bbbk[x]$ и $\mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta)$, $N_{K/\Bbbk}(\vartheta) \in \Bbbk$.

A15◇16. Покажите, что для расширения Галуа $\Bbbk \subset K$ с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(K)$ выполняются равенства **а)** $\chi_{K/\Bbbk}(\vartheta;x) = \prod\limits_{g\in G}(x - g\vartheta)$ **б)** $\mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta) = \sum\limits_{g\in G} g\vartheta$ **в)** $N_{K/\Bbbk}(\vartheta) = \prod\limits_{g\in G} g\vartheta$

A15◇17. Покажите, что **а)** $\mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta) = 0\ \forall\,\vartheta\in K \iff$ расширение $K \supset \Bbbk$ чисто несепарабельно[4] **б)** в сепарабельном расширении $K \supset \Bbbk$ форма $(\vartheta_1,\vartheta_2) = \mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta_1\vartheta_2)$ невырождена.

A15◇18. Найдите $\dim_{\mathbb{Q}}$($\mathbb{Q}$-линейной оболочки чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$).

---

[1] $p \in \mathbb{N}$ простое, $a \in \mathbb{Q}$ не является p-той степенью

[2] т.ч. минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in L$ не имеет кратных корней ни в каком расширении

[3] желающие могут положить $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[\vartheta] = \mathbb{Q}[x]/(f)$, где f — минимальный многочлен для ϑ

[4] т.ч. минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in K \smallsetminus \Bbbk$ имеет кратные корни в каком-нибудь расширении