Многочлены и аффинные алгебраические многообразия.

A14◇1. Вычислите результант: **а**) x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$ **б**) $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$ **в**) $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4 **г***) круговых многочленов Φ_n и Φ_m

A14◇2. Исключите x из системы уравнений: **а**) $x^2-xy+y^2-3=x^2y-xy^2-6=0$
б) $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0$
в) $5x^2-6xy+5y^2-16=2x^2-xy+y^2-x-y-4=0$

A14◇3 (дискриминант). Дискриминантом многочлена $f(x)=a_n\prod\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ называется произведение $D(f)=a_n^{2n-2}\prod\limits_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$. **а**) Выразите дискриминант $D(f)$ через результант $R(f,f')$ многочлена и его производной и **б**) покажите, что $D(fg)=D(f)D(g)R^2(f,g)$.

A14◇4. Вычислите дискриминанты многочленов: **а**) $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k$ **б**) $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k/k!$ **в**) x^n+a **г***) $\Phi_k(x)$ **д***) $H_n=(-1)^ne^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$ **е***) $L_n=(-1)^ne^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(x^ne^{-x}\right)$ **ж***) $T_n=2\cos\big(n\arccos(x/2)\big)$

Обозначения. Для идеала I коммутативного кольца A через $\sqrt{I}=\{a\in A\mid \exists n\in\mathbb{N}: a^n\in I\}$ обозначается его *радикал*. Для подмножества $X\subset\mathbb{A}^n$ через $I(X)=\{f\in\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]\mid f(p)=0\ \forall p\in X\}$ обозначается идеал всех полиномов, зануляющихся всюду на X. Для идеала $J\subset\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]$ через $V(J)=\{p\in\mathbb{A}^n\mid f(p)=0\ \forall f\in J\}$ обозначается задаваемое им аффинное алгебраическое многообразие.

A14◇5. Для пары идеалов I, J кольца $A=\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]$ положим $K=\{ab\mid a\in I,\ b\in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что
а) $K=IJ$ итак уже является идеалом **б**) $K=I\cap J$ (кстати, является ли идеалом $I\cap J$?)
в) $IJ=I\cap J$ **г**) $1\in I+J\Rightarrow IJ=I\cap J$ **д**) $V(I)\cup V(J)=V(IJ)=V(I\cap J)$
е) $\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}$ **ж**) $\sqrt{IJ}=\sqrt{I}\sqrt{J}$ **з**) $(I=\sqrt{I}\ \&\ J=\sqrt{J})\ \Rightarrow\ IJ=\sqrt{IJ}$.

A14◇6. Какие из следующих трёх колец Нётеровы: **а**) $A[[t]]$, где A нётерово
б) $\{p(z)/q(z)\in\mathbb{C}(z)\mid q(z)\neq 0$ при $|z|\leqslant 1\}$ **в**) $\{f(z)\in\mathbb{C}[[z]]$ сходящихся всюду в $\mathbb{C}\}$

A14◇7. Пусть $J=(xy,yz,zx)\subset\Bbbk[x,y,z]$. Опишите $V(J)\subset\mathbb{A}^3$ и $I(V(J))\subset\Bbbk[x,y,z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

A14◇8. Найдите какой-нибудь многочлен $f\in I(V(J))\smallsetminus J$ для $J=(x^2+y^2-1,y-1)\subset\Bbbk[x,y]$.

A14◇9. Опишите $V(J)\subset\mathbb{A}^3$ и $I(V(J))\subset\Bbbk[x,y,z]$ для идеала
а) $J=(xy,(x-y)z)$ **б**) $J=(xy+yz+zx,x^2+y^2+z^2)$

A14◇10. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X\subset\mathbb{A}^n$ и $Y\subset\mathbb{A}^m$. Напишите систему уравнений, задающую $X\times Y\subset\mathbb{A}^{n+m}$.

A14◇11 (топология Зарисского). Для аффинного алгебраического многообразия $X\subset\mathbb{A}^n$ положим[1] $\Bbbk[X]=\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]/I(X)$. Для каждого идеала $J\subset\Bbbk[X]$ и каждой функции $f\in\Bbbk[X]$ положим $V(J)=\{p\in X\mid f(p)=0\ \forall f\in J\}$ и $\mathscr{D}_f=X\smallsetminus V(f)$. Покажите, что
а) подмножества $V(J)\subset X$, отвечающие всевозможным идеалам $J\subset\Bbbk[X]$, составляют полный набор замкнутых множеств некоторой топологии[2] на X
б) подмножества $\mathscr{D}_f\subset X$ с $f\in\Bbbk[X]$ образуют для неё базис открытых множеств
в) любое открытое покрытие любого открытого $U\subset X$ содержит конечное подпокрытие

A14◇12. Пусть над алгебраически замкнутым полем многочлен f обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности $V(g)\subset\mathbb{A}^n$. Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит многочлен f.

A14◇13*. Пусть $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $f\in\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]$ отличен от константы. Покажите, что гиперповерхность $V(f)\subset\mathbb{A}^n$ можно параллельно спроектировать на гиперплоскость так, что прообраз любой точки гиперплоскости будет непуст и конечен.

---
[1] это фактор кольцо называется *координатной алгеброй* многообразия X
[2] она называется *топологией Зарисского*