Представления симметрических групп.

Обозначения. Всюду в этом листке для n-клеточных диаграмм Юнга λ, μ через V_λ обозначается класс изоморфных неприводимых представлений S_n левыми умножениями в левом идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, где $s_T = r_T \cdot c_T$ — симметризатор Шура, отвечающий какому-нибудь стандартному заполнению T диаграммы λ, $r_T = \sum\limits_{g\in R_T} g$, $c_T = \sum\limits_{g\in C_T} \operatorname{sgn}(g)\cdot g$, через $S^\lambda \simeq V_\lambda$ обозначается модуль Шпехта, через M^λ — модуль (строчных) таблоидов, через $C_\mu \subset S_n$ — класс сопряжённости, состоящий из всех перестановок циклового типа μ, и $z_\mu = n!/|C_\mu| = \prod\limits_i m_i!\cdot i^{m_i}$, где $m_i = m_i(\mu)$ – число строк длины i в μ.

А13◇1. Приведите в точное соответствие друг с другом геометрически заданные неприводимые представления групп **а)** S_3 **б)** S_4 **в)** S_5 и модули Шпехта S^λ.

А13◇2. Покажите, что представление S_n левыми умножениями **а)** в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$ **б)** в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot c_T$ индуцировано со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

А13◇3. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot r_T$.

А13◇4. Вычислите характер χ_V $(n-1)$-мерного представления V симметрической группы S_n несобственной группой правильного симплекса и докажите, что

а) V неприводимо **б)** $\Lambda^k V \simeq S^{((n-k),1^k)}$ **в)** $V^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C}\oplus V \oplus S^{((n-2),2)} \oplus S^{((n-2),1,1)}$.

А13◇5. Покажите, что **а)** $\chi_{((n-2),1^2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} - m_2$ **б)** $\chi_{((n-2),2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} + m_2 - 1$

А13◇6. Найдите кратность вхождения в представление S_n, индуцированного с одномерного представления циклической подгруппы, порождённой циклом максимальной длины, в котором этот цикл действует умножением на примитивный $\sqrt[n]{1}\in\mathbb{C}$, **а)** знакового представления **б)** $(n-1)$-мерного представления несобственной группой правильного симплекса.

А13◇7. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на цикле τ длины n отлично от нуля только когда $\lambda = ((n-k),\,1^k)$, в каковом случае $\chi_\lambda(\tau) = (-1)^k$.

А13◇8. Пусть $\lambda = \lambda^t$ состоит из k симметричных крюков с вершинами на главной диагонали λ, длины которых $\mu_i = 2(\lambda_i - i + 1) - 1$ строго убывают. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\mu) = (-1)^{(n-k)/2}$.

А13◇9. Покажите, что неприводимое представление V_μ симметрической группы S_m входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого представления V_ν группы S_n тогда и только, когда $\mu \supset \nu$, и в этом случае кратность вхождения равна числу заполнений косой диаграммы $\mu \smallsetminus \nu$ числами от 1 до $m-n$ без повторений так, чтобы числа строго возрастали и по строкам и по столбцам.

А13◇10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про разложения ограничений неприводимых представлений.

А13◇11. Покажите, что S^λ это единственное общее неприводимое слагаемое M^λ и $M^\lambda \otimes V_{(1^n)}$.

А13◇12. Покажите, что $[V_\nu]\cdot[V_{(1^n)}] = \oplus V_\mu$, где μ пробегает множество диаграмм, которые можно получить из ν добавлением n клеток так, чтобы никакие 2 не попали в одну строку.

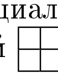
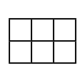
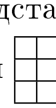
А13◇13. Покажите, что **а)** S^λ входит в $S^\mu \otimes S^\nu$ с кратностью $\sum\limits_\eta z_\eta^{-1}\chi_\lambda(C_\eta)\chi_\mu(C_\eta)\chi_\nu(C_\eta)$

б) для $\lambda = (n)$ эта кратность равна $\delta_{\mu,\nu}$ **в)** для $\lambda = (1^n)$ эта кратность равна δ_{μ,ν^t}.

А13◇14*. Докажите, что $\dim S^\lambda$ равна частному от деления $|\lambda|! = n!$ на

а) (формула Фробениуса) $\ell_1!\cdots\ell_k!\cdot\prod\limits_{i<j}(\ell_i-\ell_j)^{-1}$, где $\ell_i = \lambda_i + n - i$

б) (формула крюков) произведение длин всех крюков диаграммы λ

А13◇15. Докажите, что размерность неприводимого представления S_n меньше n только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у 2-мерного представления S_4 с диаграммой  и у двух 5-мерных представлений S_6 с диаграммами  и .