Симметрические функции – 2

Обозначения. Мы обозначаем через $h_k(x)$ сумму всех мономов степени k от $x = (x_1, x_2, \dots)$, через $e_k(x)$ сумму всех мономов степени k, линейных по каждой переменной, $p_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$. Для последовательности букв f_n, $n \in \mathbb{N}$, и k-клеточной диаграммы Юнга μ, содержащей $m_i \geqslant 0$ строк длины i (для каждого $i \in \mathbb{N}$), мы полагаем $f_\mu = f_{\mu_1} f_{\mu_2} \cdots f_{\mu_k} = f_1^{m_1} f_2^{m_2} \cdots f_k^{m_k} = f^m$. Через $m_\lambda(x)$ обозначается мономиальная симметрическая функция — сумма всех различных мономов, которые можно получить переставляя индексы переменных из монома $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_k^{\lambda_k}$. Мы полагаем $\delta = ((n-1), (n-2), \dots, 1)$ и $\Delta_\mu = \det\left(x_i^{\mu_j}\right)$ (так что $\Delta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ — детерминант Вандермонда). Через $s_\lambda(x)$ обозначается полином Шура.

А12◇1 (доминирование). Мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_j$ $\forall j$.

а) Приведите пример двух диаграмм Юнга, ни одна из которых не доминирует другую.

б) Покажите, что если $\lambda \vartriangleright \mu$ наименьший из элементов, больших μ, то μ получается из λ переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае $\mu^t \vartriangleright \lambda^t$.

в) Покажите, что для любых диаграмм $\lambda \trianglerighteq \mu \iff \lambda^t \trianglelefteq \mu^t$.

А12◇2. Каким перестановкам $g \in S_9$ соответствует по теореме о биекции пара таблиц[1]

а) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&6&7&8&9\\ \hline 4\\ \cline{1-1} 5\\ \cline{1-1}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&6&7&8&9\\ \hline 2\\ \cline{1-1} 3\\ \cline{1-1}\end{array}$ **б)** $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6\\ \hline 2&4&9\\ \cline{1-3} 7&8\\ \cline{1-2}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&7\\ \hline 2&4&8\\ \cline{1-3} 6&9\\ \cline{1-2}\end{array}$

А12◇3 (числа Костки). Обозначим через $K_{\lambda\mu}$ число таблиц Юнга формы λ и содержания μ (т. е. таких заполнений диаграммы Юнга λ μ_1 единицами, μ_2 двойками и т. д., в которых числа нестрого возрастают слева направо в каждой строке и строго возрастают сверху вниз в каждом столбце). Пользуясь комбинаторным определением полиномов Шура (через массивы), покажите, что **а)** $K_{\lambda\lambda} = 1$ и $K_{\lambda\mu} = 0$ если λ не доминирует μ **б)** $s_\lambda(x) = \sum\limits_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu(x)$

в) $h_\lambda(x) = \sum\limits_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu\lambda} s_\mu(x)$ **г)** $e_\lambda(x) = \sum\limits_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu\lambda} s_{\mu^t}(x)$.

А12◇4. Выпишите явно многочлены Шура **а)** $s_{2,1}(x_1, x_2)$ **б)** $s_{3,1}(x_1, x_2)$ **в)** $s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$

А12◇5. Покажите, что[2] **а)** $h_k(x) = \sum\limits_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)$ **б)** $e_k(x) = \sum\limits_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda(x)$

А12◇6. Введём на пространстве симметрических функций $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ скалярное произведение, для которого функции Шура s_λ являются ортонормальным базисом. Покажите, что

а) базисы из полных и мономиальных симметрических функций двойственны друг другу

б) базис из ньютоновских симметрических функций p_λ ортогонален с $\left\langle p_\lambda, p_\lambda \right\rangle = z_\lambda$.

А12◇7. Определим умножение $* : \Lambda_n \otimes \Lambda_n \longrightarrow \Lambda_n$ правилом $s_\lambda * s_\mu = \mathrm{ch}([S^\lambda \otimes S^\mu])$. Вычислите таблицу $*$-умножения ньютоновских полиномов.

А12◇8*. Обозначим через $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$ определитель Вандермонда порядка k. Для n-клеточной диаграммы λ рассмотрим в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ подпространство, порождённое орбитой многочлена $V(x_1, \dots, x_{\lambda_1^t}) \cdot V(x_{\lambda_1^t+1}, \dots, x_{\lambda_1^t+\lambda_2^t}) \cdot \;\cdots\; \cdot V(x_{\lambda_1^t+\dots+\lambda_{n-1}^t}, \dots, x_n)$ под действием симметрической группы S_n, переставляющей номера переменных. Разложите его на неприводимые представления S_n.

А12◇9*. Для стандартного заполнения T диаграммы Юнга λ веса n обозначим через $T(i,j)$ число, стоящее в j-той клетке i-той строки, и рассмотрим векторное подпространство $V_\lambda \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённое многочленами $F_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod\limits_\gamma \prod\limits_{\alpha<\beta} \left(x_{T(\alpha,\gamma)} - x_{T(\beta,\gamma)}\right)$, построенными по всевозможным стандартным заполнениям T. Покажите, что это подпространство инвариантно относительно действия симметрической группы S_n перестановками переменных и разложите его на неприводимые представления.

---

[1] первая таблица есть строчная развёртка уплотнения вниз, вторая — столбцовая развёртка уплотнения влево, а перестановка задаёт отображение из горизонтальных номеров в вертикальные

[2] напомним, что $\varepsilon_\lambda = (-1)^{\sum(k-1)m_k} = (-1)^{|\lambda|}(-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum(\lambda_i - 1)}$, а $z_\lambda = \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k})$